Math. P.
315

Rara
315 m

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

R

Theorie

der

combinatorischen Integrale

erfunden,

dargestellt, und mit mehrern Anwendungen

auf die Analysis versehen

von

Heinrich August Rothe,

ord. Professor der Mathematik zu Erlangen, der Kaiserl. Leopold. Carol. Akademie der Naturforscher ordentlichem, und der Königl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen correspondirendem Mitglied.

Nürnberg,

bei Riegel und Wiefsner.

1820.

W.

84. D

BIBLIOTECA REGIA MONACENSIS

Akademie der Landwirthe ordentlichen, und des Kgl. Bayer. Gewerb-Vereins correspondirendem Mitgliede.

Hermann August Bernhardi

von

Compilationsfolterschen Lufgeburt

Prof. Dr. Carl Heinrich Georg Schmidt

Antikritik

Braunschweig,
gedruckt bei Friedrich Vieweg und Sohn.
1850.

Vorrede.

Ich übergebe hier den Analytikern die Grundsätze eines von mir erfundenen neuen Calculs, der, wenn mich meine Hofnung nicht täuscht, von hoher Wichtigkeit ist.

Seit achtzehn Jahren beschäftige ich mich mit Ausarbeitung desselben, und hoffe also dem Publikum kein unreifes Product, sondern ihn in einer desto vollkommenern Gestalt übergeben zu können, da ich das bekannte Horazische: nonum prematur in annum doppelt in Ausübung gebracht habe.

Wer in der Analysis kein Fremdling ist, wird eingestehen, dafs man sehr oft auf Ausdrücke kommt, die aus mehrern Gliedern nach einem gewissen Gesetze zusammen gesetzt sind, und die man häufig nicht einmal vollständig darstellen kann, weil die Zahl ihrer Glieder unbestimmt ist.

Solche Ausdrücke gehörig *auf die gewöhnliche Art* vorzüglich *wiederholt* zu schreiben, damit zu rechnen, und ihre Natur klar zu übersehen, ist theils wegen der *Menge* der Glieder, theils weil das Gesetz der Zusammensetzung zu *verwickelt* ist, theils aus beiden Ursachen zugleich äufserst schwer und mühsam, erfordert ungemein viel Mühe, Zeit und Raum auf dem Papier, übersteigt die Gedult auch des geübtesten Rechners, ermüdet seine Hand im Schreiben, und strengt seine Vorstellungskraft zu sehr an.

Aus dieser Ursache haben sich so vielen analytischen Untersuchungen sehr beträchtliche, ja fast unübersteigliche Hinderniſse in den Weg gestellt, und sind so viele Theile der Analysis noch nicht hinlänglich bearbeitet.

Durch den Gebrauch *combinatorischer Integrale* wird ein beträchtlicher Theil dieser Schwierigkeiten mit ungemeiner Leichtigkeit überwunden. Durch solche Integrale werden nehmlich dergleichen Ausdrücke nicht nur höchst kurz, sondern auch so zweckmäſsig dargestellt, dafs das Gesetz der Zusammensetzung, und wenn es auch noch so verwickelt ist,

doch mit höchster Deutlichkeit in die Augen fällt, und umgekehrt solche Integrale erforderlichen Falls wieder in ihre Theile oder Elemente aufgelöfst, das heifst auf die gewöhnliche Art geschrieben werden können.

Diesen höchst glücklichen, scharfsinnigen und fruchtbaren Gedanken ergriff vorzüglich *Kramp*, man kann aber nicht sagen, er habe ihn zuerst gehabt, denn schon die beiden *Bernoulli*, so wie *la Grange* haben combinatorische Integrale auf das Polynomialtheorem angewendet.

Doch kann man *Kramp* das Verdienst nicht absprechen, solche Ausdrücke, denen er den Namen *combinatorischer Integrale* gab, häufiger, und nicht selten auf sehr verwickelte Aufgaben und Untersuchungen angewendet zu haben. Er bedient sich solcher Integrale theils in verschiedenen combinatorisch analytischen Abhandlungen, die in den trefflichen, von *Hindenburg* bei *Gerhard Fleischer* in Leipzig herausgegebenen Sammlungen solcher Abhandlungen (Erste Samml. S. 91 — 122; zweite Samml. S. 341 — 368, wo auch zum erstenmale das Wort *combinatorisches Integral* vorkommt) enthalten sind, theils in seiner Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, wo er sie *combinatorische Aggregate* nennt.

Auch *Arbogast* bedient sich in seinem Calcul des dérivations (n° 52, 53) solcher Integrale, und bezeichnet sie wie *Kramp*.

So grofs indefs diese Vortheile auch immer seyn mögen, so bleibt doch noch eine Hauptschwierigkeit übrig, wenn man nicht *im Calcul selbst* combinatorische Integrale anwenden, und sie mit eben der Leichtigkeit, wie andere algebraische Ausdrücke behandeln kann, das heifst, wenn es keine *Theorie* derselben, oder keinen combinatorischen *Integral Calcul* giebt.

Weder *Kramp*, noch *Arbogast*, noch andere haben diese Schwierigkeit meines Wissens gehoben, und daher fehlt auch allen Anwendungen, die insbesondere *Kramp* davon bisher gemacht hat, der gehörige Beweis.

Ich hoffe daher, dafs diese Theorie der combinatorischen Integrale, welcher schon *Hindenburg*, mein verehrungswürdiger, mir unvergefslicher Lehrer früher (*) erwähnte, und auf die ich glücklicher weife bei dem Nachdenken, wie oben gedachte Schwierigkeit zu besiegen, und diese Lücke zu ergänzen seyn möchte, gekommen bin, den Analysten,

(*) Ueber combinatorische Analysis und Derivationscalcul u. s. w. Leipz. bei Schwickert 1803. S. 251 — 268.

vorzüglich denjenigen, welche die Vorzüge der combinatorischen Analysis kennen, und sich mit ihrer Verbreitung und Bearbeitung beschäftigen, nicht unwillkommen seyn werde.

Ich nehme combinatorische Integrale in weitern Sinne als *Kramp*, und zwar in einem solchen, der auch Ausdrücke, die aus *unendlich viel* Gliedern nach einem gewissen Gesetze zusammengesetzt sind, zu den combinatorischen Integralen zu rechnen verstattet.

Es folgt daraus, dafs es aufser den Infinitinomien oder unendlichen Reihen, die vorzüglich bisher betrachtet worden sind, und die ich unendliche Reihen der *ersten Ordnung* oder von *einer Dimension* nenne, auch solche von *höhern Ordnungen* oder *mehrern Dimensionen* gebe, welche, obgleich verschiedene, längst angestellte Untersuchungen (*) darauf führen, doch dem Scharfsinn der Mathematiker gröfstentheils entgingen, und daher fast ganz bis jetzt noch unbearbeitet sind. Nur selten finden sich Spuren der Betrachtung solcher unendlicher Reihen, z. B. bei *Arbogast* in oben gedachtem Werke.

Nichts desto weniger beruhen *combinatorische* Integrale nicht auf dem Begriffe des Unendlichen, und haben daher mit den *gewöhnlichen* Integralen nur den Namen gemein.

Gegenwärtiges Werk besteht aus drei Abschnitten, wovon der erste von §. 1. bis 34. die *Theorie* der combinatorischen Integrale oder die *Grundsätze des combinatorischen Integralcalculs*, der andere von §. 35. bis 37. *Erklärungen* einiger minder gewöhnlicher Bezeichnungen, nebst den daraus abgeleiteten Folgen, und der dritte von §. 38. bis zum Ende *Anwendungen* der Lehren des ersten Abschnittes auf einige Materien der Analysis enthält.

Die im ersten Abschnitte aufgestellte Theorie der combinatorischen Integrale besteht, ohnerachtet ich sie, soweit sie von mir bisher erfunden worden, *vollständig* aufgestellt habe, doch nur aus wenigen Sätzen. Vielleicht werden in der Folge mehrere aufgefunden, indefs sind die hier mitgetheilten schon höchst fruchtbar, und durch ihre Hülfe können com-

---

(*) So kommt z. B. *Hindenburg* in seinem Programm: Problema solutum maxime vniuersale, ad serierum reuersionem formulis localibus et combinatorio analyticis absoluendam paralipomenon, Lips. 1793, wo er die Umkehrung der Doppelreihe abhandelt, auf eine unendliche Reihe der zweiten Ordnung. Höchst merkwürdig ist es, dafs dieser Umstand den grofsen Mann nicht aufmerksam darauf gemacht, und ihn veranlafst hat, was er durch Hülfe der combinatorischen Analysis für unendliche Reihen der *ersten* Ordnung mit so vielem Glücke geleistet hat, auch auf unendliche Reihen *zweiter* Ordnung anzuwenden.

binatorische Integrale, — — die, wenn man sie auf die gewöhnliche Art schreiben wollte, wie ungeheure Colofsen jeden durch ihren blofsen Anblick zurückschrecken würden — — mit höchster Leichtigkeit, und gewissermafsen spielend behandelt, und auf die mannigfaltigsten Theile der Analysis, vorzüglich auf die Lehre von den unendlichen Reihen (*) angewendet werden.

Der minder bekannten, im zweiten Abschnitte angeführten Bezeichnungen kommen nur drei vor, nehmlich der *Factoriellen*, der *Producte*, wie 1. 2. 3 . . . m, und der *Binomialcoefficienten*. Letztere werden zwar hier nur wenig angewendet, allein ihr Gebrauch, gegründet auf die davon geltenden und hier aufgestellten Relationen, dürfte doch in manchen Untersuchungen nützliche Dienste leisten.

Beschränkt durch die mir vorgeschriebene Bogenzahl konnte ich von den äufserst mannigfaltigen Anwendungen, die ich seit achtzehn Jahren von den gefundenen Sätzen auf verschiedene Gegenstände der Analysis gemacht habe, im dritten Abschnitte nur wenig mittheilen. Der gröfste, und ich kann sagen interessanteste Theil, ist noch zurück, und

---

(*) Hieher gehört z. B. die Multiplication, Potenziirung und Umkehrung unendlicher Reihen zweiter Ordnung, welche ich durch diese Theorie vollständig bewirkt habe. Einen Theil dessen, was die Potenziirung solcher Reihen betrift, findet man in der Schrift von D. *Martin Ohm*: De eleuatione serierum infinitarum secundi ordinis ad potestatem exponentis indeterminati; Erlang. 1811. Weiter gehört hieher die schon von *Euler* bewirkte höchst merkwürdige Umkehrung der Gleichung

$$\frac{1-y^{-r}}{r} = Ay^a + By^b + Cy^c + \ldots$$

die derselbe in der Abhandlung: Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaecunque earum potestates exprimi possunt, und der von jener als Fortsetzung zu betrachtenden: De innumeris generibus serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum etc. wie vorher (Nov. Act. Acad. Sc. Petrop. Tom. IV. ad annum MDCCLXXXVI) mitgetheilt hat. Der Umstand, dafs das Gesetz dieser Umkehrungsformeln zu verwickelt, und ohne combinatorische Integrale nicht leicht zu übersehen ist, so wie, dafs es dem von *Euler* gegebenen Beweise an Schärfe maugelt, scheint die Ursache zu seyn, dafs diese Formeln so wenig bekannt sind. Der Beweis, den ich gefunden habe, ist vollkommen streng.

werde ich ihn vielleicht, daferne das mathematische Publikum diese Arbeit mit Beifall aufnimmt, in Fortsetzungen mittheilen. Warum nicht von allen Sätzen des ersten Abschnittes sich Anwendungen im dritten finden (von dem Lehrs. §. 33. ist mir selbst bisher noch keine vorgekommen), warum von unendlichen Reihen höherer Ordnungen hier gar nichts, und von solchen der ersten Ordnung in den beiden letzten Paragraphen *nur etwas* vorkommt, und mehreres andere ist hieraus erklärbar. Indessen hoffe ich, dafs die wenigen hier mitgetheilten Anwendungen hinreichen werden, den Nutzen der Sache einzusehen. Dafs unter diesen Anwendungen sich nicht lauter neue, sondern zum Theil bekannte Sätze finden, darüber erwarte ich keinen Vorwurf. Denn theils habe ich geglaubt, dafs man sich diese Theorie desto leichter aneignen werde, wenn man sie zuerst auf bekannte Sätze anwendet, theils aber auch werden diese bekannten Sätze, durch combinatorische Integrale ausgedrückt, auf den Beweis anderer noch wenig oder gar nicht bekannter angewendet. Einige dieser bekannten Sätze habe ich früher schon selbst bearbeitet, und bewiesen, wie z. B. den Satz in §. 45. (*) Vergleicht man indefs diese frühere Behandlung mit der gegenwärtigen, so erhellet, wie viel durch Anwendung combinatorischer Integrale nicht nur an Kürze, sondern auch an Zweckmäfsigkeit, Deutlichkeit, ja man kann sogar behaupten, an Eleganz gewonnen wird.

Ein nicht unverdienstliches Unternehmen, dünkt mich, würde es seyn, die vorzüglichsten der gefundenen combinatorischen Integralformeln in *Tabellen* aufzustellen, um sie erforderlichen Falls gleich nachschlagen und weiter brauchen zu können. Es ist unmöglich, dafs das Gedächtnifs, selbst das geübteste, auch nur die wichtigsten dieser Formeln, wegen ihrer Menge, alle behalten kann, und unnöthiger Zeitverlust, sie jedesmal, wenn man sie braucht, von neuem zu suchen und zu entwickeln. Von dem Nutzen dieser und ähnlicher Tafeln, war schon *Leibnitz* überzeugt, ja begeistert (**).

(*) Die beiden Formeln 1) und 2) des §. 45. findet man in meinem Programm: „Theorema binomiale ex simplicissimis analyseos finitorum fontibus vniuersaliter demonstratum. Lips. 1793. §. VIII. A) und B). Doch sind sie dort viel weitläufiger ausgedrückt, indem ich mich der hier vorgetragenen kurzen Bezeichnung von Factoriellen und Producten von der Form $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ nicht bedient hatte."

(**) Er sagt: Consilium etiam habeo Tabularum analyticarum, quae non minoris futurae essent vsus in Analysi, quam Tabulae Sinuum in geometria practica; imo arbitror, qui paulum in iis calculandis

Dafs durch diese Theorie an Zeit und Raum gewonnen wird, bedarf hoffentlich nun keines Beweises mehr. Dafs aber auch dadurch eine Quelle neuer Erfindungen geöfnet werde, beweisen z. B. die im §. 5. 6. angestellten Untersuchungen, die ich nicht einmal vollenden konnte.

Für eine Universalmethode indefs, *alle* mehrgliedrige Ausdrücke kurz darzustellen und zu behandeln, kann ich sie nicht ausgeben. So können z. B. die Gröfsen, welche den Sinus oder Cosinus einer Summe mehrerer Theile durch den Sinus und Cosinus der einzelnen Theile ausdrücken, nicht füglich in combinatorischen Integralen dargestellt werden. Vielleicht giebt es aber eine solche Universalmethode eben so wenig, als eine Universalmedicin.

Ueber andere Gattungen combinatorischer Integrale, als diejenige, die nach §. 6. ausschlüfslich hier behandelt worden ist, habe ich noch nicht so viel nachgedacht, als die Wichtigkeit der Sache zu erfordern scheint. Dafs aber diejenige, deren Entwickelung auf eine Versetzungsklafse ohne Wiederholungen sich gründet, in der Analysis Anwendung findet, zeigt das Eliminationsproblem, wo aus n einfachen Gleichungen, für n unbekannte Gröfsen, jede bestimmt wird.

Erlangen am 28. Septbr. 1819.

Heinrich August Rothe.

(*) Die beiden Formeln 1) und 2) des §. 45. findet man in meinen Programm: „Theorema binomiale ex simplicissimis analyseos principiis demonstratum. Lips. 1792. §. VII. A) und b). Doch sind sie dort viel weitläufiger ausgedrückt, indem ich mich der hier vorgetragenen Formeln noch nicht bedient habe. Auch ist dort nur der Fall, wo n eine ganze positive Zahl ist, in Betracht gezogen. Ja bedauert (*)

versatus sit, cum progressiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulae pars sine labore continuari possit. Nihil est, quod norim in tota Analysi momenti maioris. Nam in his Tabulis pleraque problemata statim soluta haberentur, aut leui opera possent inde deduci. (*Leibnit.* Opp. T. III. p. 54.)

Theorie der combinatorischen Integrale.

§. 1.

Allgemeiner Begriff eines combinatorischen Integrals oder Aggregats.

Wenn in einem analytischen Ausdrucke einige der Buchstaben des kleingriechischen Alphabets, z B. die drei Buchstaben γ, ε, $\varkappa$ vorkommen, darinnen statt gedachter Buchstaben das erste, zweite, dritte Element (*) irgend einer Complexion von drei Elementen oder einer Ternion gesetzt, und diese Arbeit mit allen Complexionen einer dritten combinatorischen Klasse vorgenommen wird, so heifst die Summe der so entstehenden Gröfsen ein *combinatorisches Integral* oder *Aggregat.*

Beispiel. Es sey der gedachte analytische Ausdruck

$$(a^{\gamma} + \varepsilon z)^{\varkappa}$$

und die combinatorische Klasse die dritte Variationsklasse zur Summe 2 mit Zulassung des Elementes o. Nimmt man die Substitution auf die angezeigte Art vor, so entstehen

(*) Was unter den Worten, *Element*, *Complexion*, *Klasse*, *Variation* u. s. w. verstanden wird, mufs als bekannt aus der combinatorischen Analysis vorausgesetzt werden.

aus den Complexionen der Klasse			folgende Glieder
0,	0,	2	$(a^0 + 0z)^2$
0,	1,	1	$(a^0 + 1z)^1$
0,	2,	0	$(a^0 + 2z)^0$
1,	0,	1	$(a^1 + 0z)^1$
1,	1,	0	$(a^1 + 1z)^0$
2,	0,	0	$(a^2 + 0z)^0$

und die Summe dieser Glieder zur Rechten ist ein *combinatorisches Integral* oder *Aggregat*.

§. 2.

Erklärungen.

Der analytische Ausdruck, worinnen die griechischen Buchstaben vorkommen, heifst *das allgemeine Glied*, die griechischen Buchstaben, *die veränderlichen*, die übrigen Buchstaben *die unveränderlichen Gröfsen*.

1.) *Zusatz.* Die Menge der veränderlichen Gröfsen, welche im vorigen Beispiele drei war, kann jede seyn, nur mufs sie stets der Klassenzahl gleich seyn.

2.) *Zusatz.* Die veränderlichen Gröfsen kommen blos im allgemeinen Gliede vor, der Werth des combinatorischen Integrals ist aber davon ganz unabhängig, und ändert sich also auch nicht, wenn statt der griechischen Buchstaben, welche zur Bezeichnung der veränderlichen Gröfsen gebraucht wurden, andere gesetzt werden. Nur müssen gedachte Buchstaben theils sämmtlich unter sich, theils von denen verschieden seyn, welche unveränderliche Gröfsen bedeuten.

§. 3.

Zwei allgemeine Lehrsätze.

1. *Die Summe oder der Unterschied zweier combinatorischer Integrale, bei welchen, aufser den allgemeinen Gliedern, alles andere*

einerlei ist, wird gefunden, wenn man, mit Beibehaltung alles übrigen, die allgemeinen Glieder addirt oder subtrahirt.

2. *Ein combinatorisches Integral wird mit einer unveränderlichen Gröfse multiplicirt, wenn man, mit Beibehaltung alles übrigen, das allgemeine Glied damit multiplicirt.*

Der Beweis dieser Lehrsätze ist überflüssig.

Zusatz. Was im ersten Lehrsatze von der Summe *zweier* combinatorischer Integrale gesagt worden, gilt auch von *mehrern*.

§. 4.

Von den verschiedenen Gattungen combinatorischer Integrale.

Die eben angeführten Lehrsätze nannten wir *allgemeine*, in so fern sie von allen Gattungen combinatorischer Integrale gelten. Es giebt nemlich soviel solche Gattungen, als combinatorische Klassen sich denken lassen, worauf sich die Entwickelung des Werthes der combinatorischen Integrale gründet. Es kann also diese Klasse seyn entweder eine *Versetzungsklasse* mit, oder ohne Wiederholungen; oder eine *Combinations-* oder *Variations-Klasse* entweder mit, oder ohne Wiederholungen; entweder an sich, oder zu einer bestimmten Summe; oder auch jede andere, wenn sie auch noch gar nicht bisher betrachtet wäre.

§. 5.

Allgemeiner Begriff des combinatorischen Integralcalculs.

Der Inbebriff der Sätze und Regeln, welche lehren, wie man mit combinatorischen Integralen rechnen, und sie behandeln kann, ist der *combinatorische Integralcalcul.* Jede Gattung combinatorischer Integrale (§. 4.) hat ihren eigenen Calcul.

§. 6.

Von derjenigen Gattung combinatorischer Integrale, von denen hier blos gehandelt wird, und den Bedingungsgleichungen.

Hier beschäftigen wir uns blos mit der Auseinandersetzung des Calculs einer einzigen Gattung combinatorischer Integrale, derjenigen nehmlich, bei welcher die combinatorische Klasse alle Auflösungen darstellt, die einer oder mehrern Gleichungen dergestalt Genüge leisten, dafs für die unbekannten oder veränderlichen Gröfsen blos Null oder ganze positive Zahlen gesetzt werden dürfen. Die eben erwähnten Gleichungen heifsen die *Bedingungsgleichungen.*

Hieher gehört das Integral in (§. 1.), indem die dritte Variations-Klasse zur Summe 2, mit Zulassung des Elementes 0, worauf sich dessen Entwickelung gründete, alle Auflösungen darstellt, welche der Bedingungsgleichung

$$\gamma + \varepsilon + \nu = 2$$

so Genüge leisten, dafs statt der unbekannten oder veränderlichen Grössen γ, ε, ν blos Null oder ganze positive Zahlen gesetzt werden dürfen.

1.) *Zusatz.* Lassen die Bedingungsgleichungen gar keine Auflösungen zu, wie z. B. die Bedingungsgleichung $\alpha + \beta + \gamma = -3$, oder $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 5$, oder $7\alpha + 13\beta = 71$, oder die beiden Bedingungsgleichungen in Verbindung $\alpha + \beta + \gamma = 228$, $7\alpha + 13\beta + 17\gamma = 1600$, so ist auch der Werth des combinatorischen Integrals gleich Null.

2.) *Zusatz.* Sind mehrere Bedingungsgleichungen vorhanden, so müssen sie alle unabhängig von einander seyn, oder keine darf sich aus den übrigen ableiten lassen, denn sonst könnten eine oder mehrere wegfallen. Wären z. B. die drei Bedingungsgleichungen $\alpha + \beta = 5$, $\gamma + \delta + \varepsilon = 2$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 7$ gegeben, so sieht man leicht ein, dafs jede aus den beiden andern abgeleitet werden könne, eine also überflüssig sey, und deswegen weggelassen werden könne.

3) *Zusatz.* Lassen sich aus den Bedingungsgleichungen eine oder mehrere Relationen zwischen unveränderlichen Gröfsen ableiten, so müssen diese Relationen wirklich statt finden; denn sonst enthalten erstere einen Widerspruch, sind deshalb keiner Auflösung fähig, und der Werth des Integrals ist nach 1) Zus. gleich Null. Wären z. B. die drei Bedingungsgleichungen gegeben $\alpha + \beta = k$, $\gamma + \delta + \varepsilon = l$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = m$, so müssen nicht nur k, l, m Null oder ganze positive Zahlen, sondern es mufs auch $k + l = m$ seyn. Wären eben so für die drei unbekannten oder veränderlichen Gröfsen α, β, γ die drei Bedingungsgleichungen $\alpha + 2\beta = k$, $\alpha + \beta + \gamma = l$, $\alpha + 2\gamma = m$ gegeben, so müssen nicht nur k, l, m Null oder ganze positive Zahlen, sondern es mufs auch $k + m = 2l$ seyn.

§. 7.

Von der Bezeichnung combinatorischer Integrale.

So wie jede Gattung combinatorischer Integrale ihren eigenen Calcul (§. 5.) erfordert, eben so erfordert sie auch eine eigene Bezeichnung.

Zur vollständigen Bestimmung eines Integrals von der Gattung, welche hier allein betrachtet wird (§. 6.), gehören 1) das allgemeine Glied; 2) das Verzeichnifs der Buchstaben des klein griechischen Alphabets, welche die veränderlichen Gröfsen bezeichnen; 3) die Bedingungsgleichungen.

Aus dieser Ursache mag ein combinatorisches Integral von der Gattung, welche hier ausschliefslich betrachtet wird, so bezeichnet werden, dafs wir 1) dem allgemeinen Gliede das Zeichen $\int$ als Zeichen der Summe zur Linken vorsetzen, und an den obersten Punct zur Rechten einen Horizontalstrich anhängen, der so weit reicht, als das allgemeine Glied; 2) unter das allgemeine Glied das Verzeichnifs der veränderlichen Grössen, und zwar in Klammern eingeschlossen, mit dazwischen gesetzten Commaten, und 3) noch tiefer die Bedingungsgleichungen setzen. So würde z. B. das combinatorische Integral in §. 1. so ausgedrückt oder dargestellt werden können:

$$\int\overline{(a^{\gamma} + \varepsilon z)^{n}}$$
$$(\gamma, \varepsilon, n)$$
$$\gamma + \varepsilon + n = \lambda$$

Zusatz. Wenn *alle* vorkommende klein griechische Buchstaben veränderliche Gröfsen bezeichnen, so kann das Verzeichnifs der veränderlichen Gröfsen zunächst unter dem allgemeinen Gliede der Kürze wegen, wegfallen. So kann z. B. das Integral in §. 1. kürzer so dargestellt werden

$$\int\overline{(a^{\gamma} + \varepsilon z)^{n}}$$
$$\gamma + \varepsilon + n = \lambda$$

Indessen ist dieses nur eine Abkürzung, und man mufs sich immer denken, dafs dies Verzeichnifs noch darunter stehe. — Wenn aber dies nicht statt findet, sondern *blos einige* der vorkommenden griechischen Buchstaben veränderliche Gröfsen, die andern aber unveränderliche Gröfsen, jedoch blos solche, die entweder Null oder ganze positive Zahlen sind, bedeuten, so ist dies Verzeichnifs unumgänglich nothwendig. Dergleichen Integrale kommen vor. Das combinatorische Integral z. B. wo das allgemeine Glied $a^{\alpha} b^{\beta}$, die veränderlichen Gröfsen α, β, und die Bedingungsgleichung $\alpha + \beta = \gamma - 1$ ist, kann nichts anders als folgenden Ausdruck

$$a^{0} b^{\gamma-1} + a^{1} b^{\gamma-2} + a^{2} b^{\gamma-3} + \ldots + a^{\gamma-3} b^{2} + a^{\gamma-2} b^{1} + a^{\gamma-1} b^{0}$$

bedeuten, und mufs auf folgende Art

$$\int\overline{a^{\alpha} b^{\beta}}$$
$$(\alpha, \beta)$$
$$\alpha + \beta = \gamma - 1$$

angedeutet werden. Der Werth dieses combinatorischen Integrals hängt also von γ ab, weil dieses hier eine unveränderliche Gröfse ist. Wäre hingegen hier auch γ eine veränderliche Gröfse, so würde dies Integral auch, wie die Folge lehren wird, einen ganz andern Werth haben.

§. 8.

Von der Auflösung der Bedingungsgleichungen.

Um alle mögliche Auflösungen der Bedingungsgleichungen zu finden, muſs man die *unbestimmte Analytik* zu Hülfe nehmen, die daher im combinatorischen Integralcalcul eine Hauptrolle spielt. Da die veränderlichen oder unbekannten Gröſsen in den Bedingungsgleichungen gewöhnlich nicht mit einander multiplicirt oder zu höhern Potenzen erhoben vorkommen, so ist auch diese Auflösung gewönlich mit keinen sonderlichen Schwierigkeiten verbunden. Die beiden Discerptionsprobleme, deren Auflösung in der combinatorischen Analysis gelehrt wird, sind hier besonders nützlich, und durch diese wird gewöhnlich das Geschäft, wo nicht gänzlich allein ausgeführt, doch wenigstens beträchtlich erleichtert. Allgemeine Regeln lassen sich übrigens wegen der unendlichen Mannichfaltigkeit der Bedingungsgleichungen nicht aufstellen.

Durch Hülfe der nachfolgenden Lehrsätze werden diese Auflösungen öfters ebenfalls erleichtert.

§. 9.

Lehrsatz.

Statt der Bedingungsgleichungen kann man eben soviel andere setzen, welche aus den erstern abgeleitet werden können, und aus denen sich rückwärts die erstern ableiten lassen.

So kann man z. B.

statt der Bedingungsgleichungen folgende substituiren

$\alpha + \beta = 5,\ \alpha + \gamma = 7$	$\alpha + \beta = 5,\ \gamma = \beta + 2$
$\alpha + \beta + \gamma = \delta - 2,\ \delta + \varepsilon = 5$	$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 3,\ \delta = \alpha + \beta + \gamma + 2$
$\alpha + \beta = 5,\ \alpha + \gamma + \delta = 3$	$\alpha + \gamma + \delta = 3,\ \beta = \gamma + \delta + 2$

woraus sich folgende Auflösungen dieser Bedingungsgleichungen ergeben:

α	β	γ
0	5	7
1	4	6
2	3	5
3	2	4
4	1	3
5	0	2

α	β	γ	δ	ε
0	0	0	3	2
0	0	1	2	3
0	0	2	1	4
0	0	3	0	5
0	1	0	2	3
0	1	1	1	4
0	1	2	0	5
0	2	0	1	4
0	2	1	0	5
0	3	0	0	5
1	0	0	2	3
1	0	1	1	4
1	0	2	0	5
1	1	0	1	4
1	1	1	0	5
1	2	0	0	5
2	0	0	1	4
2	0	1	0	5
2	1	0	0	5
3	0	0	0	5

α	γ	δ	β
0	0	3	5
0	1	2	5
0	2	1	5
0	3	0	5
1	0	2	4
1	1	1	4
1	2	0	4
2	0	1	3
2	1	0	3
3	0	0	2

§. 10.

Lehrsatz.

Sind mehrere Bedingungsgleichungen vorhanden, und kommt jede veränderliche Gröſse nur in einer Bedingungsgleichung vor, so findet man die gesuchten Auflösungen, wenn man jede Bedingungsgleichung einzeln auflöst, und diese Auflösungen der einzelnen Bedingungsgleichungen verbindet.

Beispiel. Die Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma + \delta = 3$$

da sie *einzeln* folgende Auflösungen zulassen,

α	β
0	2
1	1
2	0

γ	δ
0	3
1	2
2	1
3	0

geben *in Verbindung* folgende Auflösungen:

α	β	γ	δ
0	2	0	3
0	2	1	2
0	2	2	1
0	2	3	0
1	1	0	3
1	1	1	2
1	1	2	1
1	1	3	0
2	0	0	3
2	0	1	2
2	0	2	1
2	0	3	0

Zusatz. Allgemeiner. Lassen sich die Bedingungsgleichungen in zwei oder mehrere Theile so zertheilen, dafs jede veränderliche Gröfse nur in einem Theile vorkommt, so müssen die Auflösungen der einzelnen Theile gesucht, und dann mit einander verbunden werden.

Beispiel. Es seyen für die zwölf unbekannten oder veränderlichen Gröfsen

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \varkappa, \lambda, \mu$$

folgende sechs Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta = 5$$
$$\alpha + \gamma = 7$$
$$\delta + \varepsilon + \zeta = \eta - 2$$

$$\nu + \theta = 5$$
$$\iota + \varkappa = 5$$
$$\iota + \lambda + \mu = 3$$

gegeben. Da nun die veränderlichen Gröfsen

$$\frac{\omega, \beta, \gamma}{\delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta}$$
$$\iota, \varkappa, \lambda, \mu$$

blos in den Theilen der Bedingungsgleichungen

$$\frac{\alpha + \beta = 5,\ \alpha + \gamma = 7}{\delta + \varepsilon + \zeta = \nu - 2,\ \eta + \theta = 5}$$
$$\iota + \varkappa = 5,\ \iota + \lambda + \mu = 3$$

vorkommen, und diese Theile *einzeln*, (wie aus den Beispielen des vorigen §. sich ergiebt) nach der Reihe 6, 20, 10 Auflösungen zulassen, so ergeben sich durch Combination dieser Auflösungen in allen 6. 20. 10 oder 1200 Auflösungen, welche den vorgelegten sechs Bedingungsgleichungen *in Verbindung* Genüge leisten.

§. 11.

Lehrsatz.

Das Product zweier oder mehrerer combinatorischer Integrale wird gefunden, wenn man die allgemeinen Glieder mit einander multiplicirt, und die veränderlichen Gröfsen sowohl, als auch die Bedingungsgleichungen aller einzelnen Integrale in Verbindung betrachtet, vorausgesetzt, dafs diejenigen Buchstaben des klein griechischen Alphabets welche in einem dieser Integrale die veränderlichen Gröfsen bezeichnen, in keinem der übrigen vorkommen.

Beispiele. Es ist

$$\overline{\int F(\alpha, \beta)}_{\alpha + \beta = 2} \cdot \overline{\int f(\gamma, \delta)}_{\gamma + \delta = 3} = \overline{\int F(\alpha, \beta), . f(\gamma, \delta)}_{\alpha + \beta = 2,\ \gamma + \delta = 3}$$

$$\overline{\int F(\alpha, \beta, \gamma)}_{\substack{\alpha + \beta = 5 \\ \alpha + \gamma = 7}} \cdot \overline{\int f(\delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta)}_{\substack{\delta + \varepsilon + \zeta = \eta - 2 \\ \eta + \theta = 5}} \cdot \overline{\int \Phi(\iota, \varkappa, \lambda, \mu)}_{\substack{\iota + \varkappa = 5 \\ \iota + \lambda + \mu = 3}} =$$

$$\int F(\alpha, \beta, \gamma)\ f(\delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta).\ \Phi(\iota, \varkappa, \lambda, \mu)$$

$$\alpha + \beta = 5, \quad \delta + \varepsilon + \zeta = \eta - 2, \quad \iota + \varkappa = 5$$

$$\alpha + \gamma = 7, \quad \eta + \theta = 5, \quad \iota + \lambda + \mu = 3$$

wo die Buchstaben F, f, Φ Functionen der nachfolgenden in Klammern stehenden griechischen Buchstaben bedeuten.

Beweis. Folgt aus vorigem § und dem zugehörigen Zusatze.

§. 12.

Lehrsatz.

Man kann den Bedingungsgleichungen eine neue hinzufügen, wenn dadurch eine neue veränderliche Gröfse eingeführt, und so bestimmt wird, dafs sie für alle Werthe der vorigen veränderlichen Gröfsen nothwendig Null oder einer ganzen positiven Zahl gleich wird.

1.) *Beispiel.* Es sey für die zwei veränderlichen Gröfsen α und β die Bedingungsgleichung $\alpha + \beta = 5$ aufgestellt. Kömmt nun die neue Bedingungsgleichung $\gamma = \beta + 2$ hinzu, wodurch eine neue veränderliche Gröfse γ eingeführt wird, so erhellet, dafs γ in dieser Gleichung so bestimmt ist, dafs es nothwendig einer ganzen positiven Zahl gleich wird, welchen Werth auch die vorigen veränderlichen Gröfsen haben. Die Auflösungen also, welche den *beiden*, für die *drei* veränderlichen Grössen α, β, γ geltenden Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta = 5, \qquad \gamma = \beta + 2$$

oder, welches nach §. 9. einerlei ist,

$$\alpha + \beta = 5, \qquad \alpha + \gamma = 7$$

zukommen, sind ganz mit denen einerlei, welche die *einzige*, für die *beiden*, veränderlichen Gröfsen α, β aufgestellte Bedingungsgleichung $\alpha + \beta = 5$ zuläfst. Sie können daher auch beide in *einer* Tabelle dargestellt werden, und unterscheiden sich blos dadurch, dafs für die letztern eine neue Rubrik hinzukommt, welche die Werthe der

neu eingeführten veränderlichen Gröfse enthält, und diese Tafel würde folgende seyn

α	β	γ
0	5	7
1	4	6
2	3	5
3	2	4
4	1	3
5	0	2

2.) *Beispiel.* Es seyen für die fünf veränderlichen Gröfsen α, β, γ, δ, ε die zwei Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \qquad \alpha + \delta + \varepsilon = 3$$

aufgestellt. Kommt nun noch die neue Bedingungsgleichung $\zeta = \beta + \gamma$ hinzu, wodurch eine neue veränderliche Gröfse ζ eingeführt wird, so erhellet, dafs, weil der Ausdruck $\beta + \gamma$ nothwendig eine ganze positive Zahl oder Null ist, welchen Werth auch die ersten fünf veränderlichen Gröfsen haben mögen, die Auflösung der für die *sechs* veränderlichen Gröfsen α, β, γ, δ, ε, ζ aufgestellten *drei* Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \qquad \alpha + \delta + \varepsilon = 3, \qquad \zeta = \beta + \gamma$$

oder, welches nach §. 9. einerlei ist

$$\alpha + \zeta = 2, \qquad \zeta = \beta + \gamma, \qquad \delta + \varepsilon = \zeta + 1$$

von denen nicht verschieden sind, welche den für die *fünf* ersten veränderlichen Gröfsen aufgestellten *zwei* Bedingungsgleichungen zukommen.

Beweis. Ist überflüssig.

Zusatz. Was für *eine* neu hinzukommende veränderliche Gröfse und Bedingungsgleichung gesagt worden ist, gilt auch von mehreren. So ist es z. B. einerlei, ob man für die vier veränderlichen Gröfsen α, β, γ, δ die einzige Bedingungsgleichung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$, oder ob man für die sechs veränderlichen Gröfsen α, β, γ, δ, ε, ζ die drei Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = n, \quad \alpha + \beta = \varepsilon, \quad \gamma + \delta = \zeta$$

oder, welches einerlei ist (§. 9.)

$$\alpha + \beta = \varepsilon, \quad \gamma + \delta = \zeta, \quad \varepsilon + \zeta = \eta$$

auflöst.

§. 13.

Lehrsatz.

Der Werth eines combinatorischen Integrals ändert sich nicht, wenn eine neue veränderliche Gröfse hinzukommt, die durch eine, ebenfalls neu hinzukommende Bedingungsgleichung so durch die vorigen bessimmt wird, dafs sie nothwendig Null oder einer ganzen positiven Zahl gleich wird.

Beispiele:

$$\int \overline{F\ (\alpha, \beta)} \quad = \quad \int F\ \overline{(\alpha, \beta)} \quad = \quad \int \overline{F\ (\alpha, \beta)}$$

$$\alpha + \beta = 5 \qquad \alpha + \beta = 5, \gamma = \beta + 2 \qquad \alpha + \beta = 5, \alpha + \gamma = 7$$

$$\int \overline{F\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} \quad = \quad \int F\ \overline{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} \quad = \quad \int \overline{F\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,)}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \qquad \alpha + \beta + \gamma = 2 \qquad \alpha + \zeta = 2, \ \delta + \varepsilon = \zeta + 1$$

$$\alpha + \delta + \varepsilon = 3 \qquad \alpha + \delta + \varepsilon = 3 \qquad \beta + \gamma = \zeta$$

$$\beta + \gamma = \zeta$$

Beweis. Folgt aus dem im vorigen §. enthaltenen Lehrsatze.

Zusatz. Was von *einer* neu hinzukommenden veränderlichen Gröfse und Bedingungsgleichung gesagt worden, gilt auch von mehreren.

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn eine der veränderlichen Gröfsen in einer Bedingungsgleichung so durch die übrigen bestimmt ist, dafs sie, für alle Werthe, die letztere annehmen können, nothwendig Null oder einer positiven ganzen Zahl gleich werden mufs, so kann diese veränderliche Gröfse und Bedingungsgleichung zugleich wegfallen, wenn man statt gedachter veränderlichen Gröfse in allen übrigen Bedingungsgleichun-

gen, wo sie vorkommt, ihren Werth aus der wegfallenden Bedingungsgleichung substituirt.

Beispiel. Es seyen für die vier veränderlichen Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die zwei Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta = 5, \quad \beta = \gamma + \delta + 2$$

aufgestellt. Da in der letztern Bedingungsgleichung β so durch die übrigen veränderlichen Gröfsen bestimmt ist, dafs es für alle Werthe, die letztere annehmen können, nothwendig einer ganzen positiven Zahl gleich werden mufs, so kann die veränderliche Gröfse β, und letztere Bedingungsgleichung wegfallen, und es ist einerlei, wenn man für die drei veränderlichen Gröfsen α, γ, δ die einzige Bedingungsgleichung $\alpha + \gamma + \delta + 2 = 5$, oder $\alpha + \gamma + \delta = 3$ auflöst.

Beweis. Folgt aus Umkehrung von §. 12.

Zusatz. Was von *einer* veränderlichen Gröfse und Bedingungsgleichung gesagt worden, gilt auch von *mehrern.*

§. 15.

Lehrsatz.

Wenn eine der veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals so durch die übrigen in einer Bedingungsgleichung bestimmt ist, dafs sie für alle Werthe, welche letztere annehmen können, nothwendig Null oder einer ganzen positiven Zahl gleich werden mufs; so läfst sich dies Integral in ein anderes verwandeln, das aus vorigen entsteht, wenn diese veränderliche Gröfse und Bedingungsgleichung wegfällt, und statt gedachter veränderlicher Gröfse im allgemeinen Gliede und den übrigen Bedingungsgleichungen überall ihr Werth, aus der wegfallenden Bedingungsgleichung substituirt wird.

Beispiel:

$$\int \overline{F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \quad = \quad \int \overline{F(\alpha, \gamma + \delta + 2, \gamma, \delta)}$$

$$\alpha + \beta = 5, \ \beta = \gamma + \delta + 2 \qquad \alpha + \gamma + \delta = 3$$

Beweis. Folgt aus §. 14.

§. 16.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröſsen, deren Verzeichniſs (Δ) *heiſsen mag, einige Bedingungsgleichungen* (D) *gegeben sind, und hierzu noch einige Bedingungsgleichungen* (L) *kommen, in welchen noch andere neue veränderliche Gröſsen vorkommen, deren Verzeichniſs* (Λ) *seyn mag; so finden sich alle Auflösungen, welche den Bedingungsgleichungen* (D) *und* (L) *in Verbindung Genüge leisten, wenn man*

1) *aus den Bedingungsgleichungen* (D) *alle verschiedene Werthe der veränderlichen Gröſsen* (Δ) *aufsucht, dann aber*

2) *für jede dieser Auflösungen, alle verschiedene Werthe der veränderlichen Gröſsen* (Λ) *aus den Bedingungsgleichungen* (L) *ableitet, bei welcher Ableitung nun die Gröſsen in* (Δ) *als unveränderlich angesehen werden.*

Erstes Beispiel. Es sey gegeben für die veränderlichen Gröſsen

$$\alpha,\ \beta \qquad (\Delta)$$

die Bedingungsgleichung

$$\alpha + \beta = 2 \qquad (D)$$

so läſst selbige folgende drei Auflösungen zu

α	β
0	2
1	1
2	0

Kommt nun noch die Bedingungsgleichung

$$\alpha + \gamma + \delta = 3 \qquad (L)$$

hinzu, worinnen noch andere veränderliche Gröſsen

$$\gamma,\ \delta \qquad (\Lambda)$$

vorkommen, so finden sich für die

erste zweite dritte

der vorhin aufgestellten Auflösungen von (D), folgende Auflösungen der Bedingungsgleichung (L)

γ	δ
0	3
1	2
2	1
3	0

γ	δ
0	2
1	1
2	0

γ	δ
0	1
1	0

Die Auflösungen also, welche den beiden Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta = 2 \qquad \alpha + \gamma + \delta = 3$$

für die vier veränderlichen Grösen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

in Verbindung Genüge leisten, sind folgende:

α	β	γ	δ
0	2	0	3
0	2	1	2
0	2	2	1
0	2	3	0
1	1	0	2
1	1	1	1
1	1	2	0
2	0	0	1
2	0	1	0

Die Involutionen in dieser Tafel zur Rechten des Verticalstrichs zwischen den Horizontallinien zeigen, welche Auflösungen von (L) zu jeder Auflösung von (D) gehören.

Zweites Beispiel. Es seyen für die fünf veränderlichen Grösen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon$$

die Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \qquad \alpha + \delta + \varepsilon = 3$$

gegeben. Nimmt man nun

α, β, γ für (Δ)
δ, ε für (Λ)

an, so ist

$\alpha + \beta + \gamma = 2$: der Theil (D)
$\alpha + \delta + \varepsilon = 3$: der Theil (L)

und es finden sich folgende Auflösungen:

α	β	γ	δ	ε
0	0	2	0	3
0	0	2	1	2
0	0	2	2	1
0	0	2	3	0
0	1	1	0	3
0	1	1	1	2
0	1	1	2	1
0	1	1	3	0
0	2	0	0	3
0	2	0	1	2
0	2	0	2	1
0	2	0	5	0
1	0	1	0	2
1	0	1	1	1
1	0	1	2	0
1	1	0	0	2
1	1	0	1	1
1	1	0	2	0
2	0	0	0	1
2	0	0	1	0

Drittes Beispiel. Es seyen für die fünf veränderlichen Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ gegeben die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\alpha + \beta = 1 \qquad \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3.$$

Nimmt man nun

α, β für (Δ)
$\gamma, \delta, \varepsilon$ für (Λ)

an, so ist

$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{der Theil} \quad (D)$$
$$\beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3 \quad \text{der Theil} \quad (L)$$

und man hat folgende Auflösungen:

α	β	γ	δ	ε
0	1	0	0	2
0	1	0	1	1
0	1	0	2	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	2	0	0
1	0	0	0	3
1	0	0	1	2
1	0	0	2	1
1	0	0	3	0
1	0	1	0	2
1	0	1	1	1
1	0	1	2	0
1	0	2	0	1
1	0	2	1	0
1	0	3	0	0

Beweis. Folgt aus den angeführten Beispielen.

1.) *Zusatz.* Wenn in einem Theile (D) der Bedingungsgleichungen nur ein Theil (Δ) der veränderlichen Gröfsen vorkommt, und dieser Theil (D) nur eine endliche Anzahl, nehmlich $m + 1$, Auflösungen zuläfst, so kann man die veränderlichen Gröfsen in (Δ) und Bedingungsgleichungen in (D) weglassen, wenn man in den übrigen Bedingungsgleichungen statt der veränderlichen Gröfsen (Δ) die Werthe substituirt, die jede der $m + 1$ Auflösungen von (D) angiebt. So erhält man sämmtliche Auflösungen in $m + 1$ Theile abgetheilt.

2.) *Zusatz.* Wenn es für eine oder mehrere Auflösungen von (D) keine Auflösungen von (L) geben sollte, so kommen erstere in der Schlufstafel gar nicht vor, und sind daher überflüssig oder unnütz.

Beispiel. Es seyen wie vorher, für die fünf veränderlichen Grössen

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$$

gegeben die Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad \alpha + \delta + \varepsilon = 3$$

Nimmt man nun

$\alpha, \delta, \varepsilon$ für (Δ)

β, γ für (λ)

an, so ist

$\alpha + \delta + \varepsilon = 3$ der Theil (D)

$\alpha + \beta + \gamma = 2$ der Theil (L)

und es finden sich folgende Auflösungen:

α	δ	ε	β	γ	
0	0	3	0	2	(Δ)
0	0	3	1	1	(λ)
0	0	3	2	0	
0	1	2	0	2	(D)
0	1	2	1	1	
0	1	2	2	0	(L)
0	2	1	0	2	
0	2	1	1	1	
0	2	1	2	0	
0	3	0	0	2	
0	3	0	1	1	
0	3	0	2	0	
1	0	2	0	1	
1	0	2	1	0	
1	1	1	0	1	
1	1	1	1	0	
1	2	0	0	1	
1	2	0	1	0	
2	0	1	0	0	
2	1	0	0	0	

Die Auflösung von (D) $\alpha = 3$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ wird also unnütz und kommt in der Schlufstafel daher nicht vor.

3.) *Zusatz.* Wenn man nach §. 12. eine neue veränderliche Gröfse oder mehrere einführt, und selbige zu (Δ) rechnet, so können die unnützen Auflösungen oft vermieden werden. Man führe, um dies auf das Beispiel des vorigen Zusatzes anzuwenden, noch die veränderliche Gröfse ζ durch die neu hinzukommende Bedingungsgleichung $\zeta = \beta + \gamma$ ein, so kann man statt der Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad \alpha + \delta + \varepsilon = 3, \quad \zeta = \beta + \gamma$$

nach §. 9. setzen

$$\alpha + \zeta = 2, \quad \alpha + \delta + \varepsilon = 3, \quad \zeta = \beta + \gamma$$

Man nehme nun

$\alpha, \delta, \varepsilon, \zeta$	0 für (Δ)
β, γ	1 für (Λ)

an, so ist

$\alpha + \delta + \varepsilon = 3$, $\alpha + \zeta = 2$	der Theil (D)
$\zeta = \beta + \gamma$	der Theil (L)

und es ergeben sich folgende Auflösungen:

α	δ	ε	ζ	β	γ
0	0	3	2	0	2
0	0	3	2	1	1
0	0	3	2	2	0
0	1	2	2	0	2
0	1	2	2	1	1
0	1	2	2	2	0
0	2	1	2	0	2
0	2	1	2	1	1
0	2	1	2	2	0
0	3	0	2	0	2
0	3	0	2	1	1
0	3	0	2	2	0

α	δ	ε	ζ	β	γ
1	0	2	1	0	1
1	0	2	1	1	0
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0
1	2	0	1	0	1
1	2	0	1	1	0
2	0	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0

Zusatz. Die Menge der nützlichen Auflösungen in (D) kann nicht gröfser seyn als die Menge der Auflösungen, welche (D) und (L) in Verbindung zulassen. Ist daher diese endlich, so ist es auch jene.

§. 17.

Zwei Lehrsätze.

1. *Wenn eines combinatorischen Integrals* I *veränderliche Grössen* (Δ), *Bedingungsgleichungen* (D), *das allgemeine Glied aber wieder ein combinatorisches Integral* 'I *ist, dessen veränderliche Gröfsen* (λ), *Bedingungsgleichungen* (L), *und das allgemeine Glied* T *ist; so ist dies combinatorische Integral einem andern* I *gleich, dessen veränderliche Gröfsen* (Δ) *und* (λ), *Bedingungsgleichungen* (D) *und* (L) *in Verbindung enthalten und dessen allgemeines Glied* T *ist.*

2. *Wenn* (wie im Lehrsatze §. 16.) *für einige veränderliche Grössen, deren Verzeichnifs* (Δ) *ist, einige Bedingungsgleichungen* (D) *gegeben sind, und hierzu noch andere Bedingungsgleichungen* (L) *kommen, in welchen noch andere neue veränderliche Gröfsen* (λ) *vorkommen, so ist ein combinatorisches Integral* "I, *dessen veränderliche Gröfsen* (Δ) *und* (λ) *in Verbindung, Bedingungsgleichungen* (D) *und* (L) *ebenfalls in Verbindung, das allgemeine Glied aber* T *ist, einem andern* I *gleich, dessen veränderliche Gröfsen* (Δ), *Bedingungsgleichungen* (D), *das allgemeine Glied aber wieder ein combinatorisches Integral* 'I *ist; dessen veränderliche Gröfsen* (λ), *Bedingungsgleichungen* (L), *und das allgemeine Glied* T *ist.*

Beweis. Folgt aus dem Lehrsatze des vorigen §.

1.) *Zusatz.* Die veränderlichen Gröfsen (λ) kommen blos im Integrale "I nicht aber in I vor. Wenn also durch Anwendung des zweiten Lehrsatzes das Integral "I in I verwandelt wird, so werden diese veränderlichen Gröfsen *weggeschafft*, und dieses Ausdrucks wollen wir uns in der Folge immer bedienen, um kurz die veränderlichen Gröfsen anzuge-

ben, die bei der Anwendung dieses Lehrsatzes für den Theil (A) angenommen werden sollen.

2.) *Zusatz.* Wenn in einem Theile (D) der Bedingungsgleichungen eines combinatorischen Integrals $''I$ nur ein Theil (Δ) der veränderlichen Gröfsen vorkommt, und gedachter Theil (D) nur eine endliche Anzahl Auflösungen zuläfst, nehmlich $m + 1$ Auflösungen; so ist das erwähnte Integral $''I$ der Summe von $m + 1$ andern gleich, die aus vorigen entstehen, wenn man die veränderlichen Gröfsen und Bedingungsgleichungen (Δ) und (D) wegläfst, und in dem allgemeinen Gliede und den übrigen Bedingungsgleichungen anstatt der veränderlichen Gröfsen in (Δ), ihre Werthe setzt, die jede der $m + 1$ Auflösungen von (D) angiebt.

Erstes Beispiel. Wenn unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α und β, und unter den Bedingungsgleichungen desselben auch $\alpha + \beta = 0$ vorkäme, so würde, weil die erwähnte Bedingungsgleichung nur die einzige Auflösung $\alpha = 0$, $\beta = 0$, zuläfst, dieses Integral einem andern gleich seyn, das aus dem vorigen entsteht, wenn man α und β aus dem Verzeichnisse der veränderlichen Gröfsen, und $\alpha + \beta = 0$ aus den Bedingungsgleichungen wegnimmt, und in dem allgemeinen Gliede und übrigen Bedingungsgleichungen überall 0 statt α und β setzt.

Zweites Beispiel. Wenn unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α, β, γ und unter den Bedingungsgleichungen desselben auch folgende beide $\alpha + \beta = 2$, $\alpha + \gamma = 5$ befindlich wären, so würde, weil erwähnte Bedingungsgleichungen nur die drei Auflösungen in der Tafel

α	β	γ
0	2	5
1	1	4
2	0	3

zulassen, erwähntes Integral der Summe von drei andern gleich seyn, die

aus vorigen entstehen, wenn man α, β und γ aus dem Verzeichnisse der veränderlichen Gröfsen, und aus den Bedingungsgleichungen die beiden $\alpha + \beta = 2$, $\alpha + \gamma = 5$ wegnimmt, und nun in dem allgemeinen Gliede und übrigen Bedingungsgleichungen statt α, β, γ erst 0, 2, 5 dann 1, 1, 4 dann 2, 0, 3 setzt.

3.) *Zusatz.* Wenn zwei combinatorische Integrale $^{\prime\prime\prime}\mathrm{I}$ und $^{\prime\prime\prime\prime}\mathrm{I}$, wobei ein Theil ($\Delta$) der klein griechischen Buchstaben (§. 7. Zus.) *unveränderliche* Zahlen bedeuten, einander immer gleich sind, welche ganze nicht negative Werthe man gedachten Buchstaben auch giebt; so werden auch die Integrale I und $^{\prime}\mathrm{I}$ einander gleich seyn, die aus vorigen entstehen, wenn auch die Buchstaben in (Δ) als veränderlich angesehen, und beiderseits einerlei Bedingungsgleichungen (D) für gedachte Buchstaben beigefügt werden. Es ist nehmlich nach den angeführten Lehrsätzen dann sowohl I als $^{\prime}\mathrm{I}$ einem combinatorischen Integrale gleich, dessen veränderliche Gröfsen (Δ), Bedingungsgleichungen (D), und allgemeines Glied $^{\prime\prime}\mathrm{I}$ oder $^{\prime\prime\prime}\mathrm{I}$ ist.

§. 18.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröfsen, worunter α nicht aber $\varkappa$ befindlich ist, Bedingungsgleichungen (D) gegeben sind, und durch Hinzufügung der neuen Bedingungsgleichung $\alpha = 2\varkappa$ oder $\alpha = 2\varkappa + 1$ eine neue veränderliche Gröfse $\varkappa$ eingeführt wird, so werden alle Auflösungen der Bedingungsgleichungen (D), in welchen α im ersten Falle gerade, im andern ungerade ist, von einander abgesondert dargestellt.

Beispiel. Die Bedingungsgleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \qquad \text{(D)}$$

läfst folgende Auflösungen zu

α	β	γ
0	0	3
0	1	2
0	2	1
0	3	0
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0
3	0	0

(T)

Die Auflösungen der Bedingungsgleichungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 3$$

$$\alpha = 2\varkappa$$

hingegen, sind folgende:

α	β	γ	$\varkappa$
0	0	3	0
0	1	2	0
0	2	1	0
0	3	0	0
2	0	1	1
2	1	0	1

(U)

α	β	γ	$\varkappa$
1	0	2	0
1	1	1	0
1	2	0	0
3	0	0	1

(V)

Beweis. Ist überflüssig.

1.) *Zusatz.* Wenn für einige veränderliche Grösen, worunter α nicht aber $\varkappa$ befindlich ist, Bedingungsgleichungen (D) gegeben sind, so erhält man die Auflösungen derselben in zwei Theile getrennt, wenn man diesen Bedingungsgleichungen einmal $\alpha = 2\varkappa$, dann $\alpha = 2\varkappa + 1$ als neue Bedingungsgleichung, den veränderlichen Grösen aber $\varkappa$ hinzufügt.

2.) *Zusatz.* Sind die Bedingungsgleichungen, welche $\varkappa$ enthalten, eingeführt, so kann man selbige und die veränderliche Grösse α nach §. 14. wieder wegschaffen. Denkt man sich nehmlich in vorigem Beispiele in den Tafeln (U) und (V) die Rubrik α hinweg, so enthält erstere die

Auflösung der Bedingungsgleichung $2 . x + \beta + \gamma = 3$, letztere der Bedingungsgleichung $2 . x + \beta + \gamma = 2$.

3.) *Zusatz.* Wenn nach der Natur der Bedingungsgleichungen (D) nothwendig α gerade ist, so kann ohne Bedenken die Bedingungsgleichung $\alpha = 2 . x$, wenn hingegen nothwendig α ungerade ist, die Bedingungsgleichung $\alpha = 2 . x + 1$ hinzugefügt werden.

§. 19.

Lehrsatz.

Wenn unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α vorkommt, so ist selbiges der Summe zweier andern gleich, die aus vorigem entstehen, wenn man in dem allgemeinen Gliede und Bedingungsgleichungen erst $2 . \alpha$ dann $2 . \alpha + 1$ statt α setzt.

Beweis. Nach (§. 18. 1.) Zus.) läfst sich das gegebene Integral in zwei andere zertheilen, die aus ersteren entstehen, wenn x den veränderlichen Gröfsen, und die Bedingungsgleichung $\alpha = 2 . x$, oder $\alpha = 2 . x + 1$ den Bedingungsgleichungen beigefügt wird. — So erhält man zwei combinatorische Integrale, worinnen α, x und die übrigen veränderlichen Gröfsen vorkommen. — — In diesen kann man nach §. 15. die neu eingeführte Bedingungsgleichung und die veränderliche Gröfse α wegschaffen, wenn man überall statt α entweder $2 . x$ oder $2 . x + 1$ setzt. — — So erhält man zwei Integrale, welche nicht mehr α, dagegen aber x und die übrigen veränderlichen Gröfsen enthalten. — — In diesen kann man nach (§. 2. 2.) Zus.) statt x wieder α einführen, und so erhält man die Integrale, wovon im Lehrsatze die Rede war.

Zusatz. Kommt unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α vor, und verschwindet das allgemeine Glied, wenn α ungerade ist, oder mufs nach den Bedingungsgleichungen nothwendig α gerade seyn, so kann man ohne Bedenken im allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen $2 . \alpha$ statt α setzen. Verschwindet das allge-

meine Glied hingegen, wenn α gerade ist, oder muſs nach den Bedingungsgleichungen nothwendig α ungerade seyn, so kann man eben so $2.\alpha+1$ statt α setzen.

§. 20.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröſsen, worunter α nicht aber x befindlich ist, Bedingungsgleichungen (D) gegeben sind, und durch Hinzufügung der neuen Bedingungsgleichung $x=3.x$, oder $\alpha=3.x+1$ oder $\alpha=3.x+2$ eine neue veränderliche Gröſse x eingeführt wird, so werden alle Auflösungen der Bedingungsgleichungen (D), in welchen α durch 3 dividirt, entweder 0, oder 1, oder 2 zum Reste läſst, von einander abgesondert dargestellt.

Beweis. Ist überflüssig.

1.) *Zusatz.* Wenn für einige veränderliche Gröſsen, worunter α nicht aber x befindlich ist, Bedingungsgleichungen gegeben sind, so erhält man die Auflösungen derselben in drei Theilen getrennt, wenn man diesen Bedingungsgleichungen einmal $\alpha=3.x$, dann $\alpha=3x+1$, dann $\alpha=3.x+2$ als neue Bedingungsgleichung, den veränderlichen Gröſsen aber x beifügt.

2.) *Zusatz.* Sind die Bedingungsgleichungen, welche x enthalten, eingeführt, so kann man selbige und die veränderliche Gröſse α nach §. 14. wegschaffen.

§. 21.

Lehrsatz.

Wenn unter den veränderlichen Gröſsen eines combinatorischen Integrals α vorkommt, so ist selbiges der Summe dreier andern gleich, die aus vorigen entstehen, wenn man in dem allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen erst $3.\alpha$, dann $3.\alpha+1$, dann $3.\alpha+2$ statt α setzt.

Beweis. Folgt eben so aus (§. 20. 1.) Zus.), wie der Lehrsatz §. 19. aus §. 18. 1.) Zus.

§. 22.

Lehrsatz.

Wenn m *irgend eine gegebene unveränderliche ganze nicht negative Zahl ist, und für einige veränderliche Grösen, worunter* α, *nicht aber* $\varkappa$, λ, μ *befindlich sind, Bedingungsgleichungen gegeben sind, so können den veränderlichen Grösen ohne Bedenken* $\varkappa$, λ, μ, *den Bedingungsgleichungen aber, die beiden*

$$\alpha = (m + 1).\varkappa + \lambda, \qquad \lambda + \mu = m$$

beigefügt werden.

Beweis. Man nehme in (§. 16. 1.) Zus.) λ, μ für den Theil (Δ) der veränderlichen Grösen, und $\lambda + \mu = m$ für den Theil (D) der Bedingungsgleichungen an, so erhellet die Wahrheit des Satzes für $m = 1$ aus (§. 18. 1.) Zus.), für $m = 2$ aus (§. 20. 1.) Zus.) u. s. w. Für $m = 0$ ist gar kein Beweis nöthig.

Zusatz. Sind die beiden Bedingungsgleichungen

$$\alpha = (m + 1).\varkappa + \lambda, \quad \lambda + \mu = m$$

einmal eingeführt, so kann man nach §. 14. erstere und die veränderliche Grösse α wegschaffen, wenn man in allen übrigen Bedingungsgleichungen statt α seinen Werth, aus der weggeworfenen Bedingungsgleichung substituirt.

§. 23.

Lehrsatz.

Wenn unter den veränderlichen Grösen eines combinatorischen Integrals α, *nicht aber* λ *und* μ *vorkommt, und* m *eine bestimmte unveränderliche, ganze nicht negative Zahl bedeutet, so ist dies Integral einem andern gleich, das aus vorigen entsteht, wenn den veränderlichen Grösen* λ *und* μ, *den Bedingungsgleichungen aber*

$\lambda + \mu = m$ *beigefügt, und in dem allgemeinen Gliede und den übrigen Bedingungsgleichungen* $(m + 1)$. $\alpha + \lambda$ *statt* α *substituirt wird.*

Beweis. Man nehme in (§. 17. 2.) Zus.) λ, μ für den Theil (Δ) der veränderlichen Gröfsen, und $\lambda + \mu = m$ für den Theil (D) der Bedingungsgleichungen an, so erhellet die Wahrheit des Satzes für $m = 1$ aus (§. 19.), für $m = 2$, aus (§. 21.), u. s. w. Für $m = 0$ ist gar kein Beweis nöthig.

§. 24.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröfsen, worunter α *und* β, *nicht aber* $\varkappa$, λ, μ *befindlich sind, Bedingungsgleichungen gegeben sind, so können den veränderlichen Gröfsen* $\varkappa$, λ, μ, *den Bedingungsgleichungen aber die beiden* $\alpha = (\beta + 1)\varkappa + \lambda$, $\lambda + \mu = \beta$ *beigefügt werden.*

Beweis. Man dividire α durch $\beta + 1$, so kann für $\varkappa$ der genäherte Quotient, und für λ der Rest angenommen werden. Da nun der Rest allemal kleiner als der Divisor ist, so ist $\lambda < \beta + 1$, folglich $\lambda \overline{<} \beta$, also ist $0 \overline{<} \beta - \lambda$, oder $0 \overline{<} \mu$, mithin wird auch μ eine ganze nicht negative Zahl. Nähme man aber $\varkappa$ um 1 gröfser oder kleiner an, so würde im ersten Falle λ, im andern μ negativ werden, und dies würde noch vielmehr der Fall seyn, wenn man $\varkappa$ um mehr als 1 vergröfserte oder verkleinerte. Für ein gegebenes α und β hat also $\varkappa$, λ, μ gewifs einen, aber auch nur einen ganzen nicht negativen Werth.

Zusatz. Dafselbe gilt, wenn unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α, β nicht aber $\varkappa$, λ, μ befindlich wären.

§. 25.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröfsen worunter α, *nicht aber* $\varkappa$ *befindlich ist, Bedingungsgleichungen gegeben sind, und durch die*

neu hinzukommende Bedingungsgleichung $\alpha = \varkappa + 1$ *die neue veränderliche Gröfse* $\varkappa$ *eingeführt wird; so werden nur diejenigen Auflösungen der vorigen Bedingungsgleichungen übrig bleiben, worinnen* α *eine ganze positive Zahl ist, diejenigen hingegen ausgeschlossen, worinnen* $\alpha = 0$ *ist.*

Beweis. Ist überflüssig.

1.) *Zusatz.* Die ausgeschlossenen Auflösungen der anfänglichen Bedingungsgleichungen werden erhalten, wenn man $\alpha = 0$ setzt. Wenn also für einige veränderliche Gröfsen, worunter α nicht aber $\varkappa$ befindlich ist, Bedingungsgleichungen gegeben sind, so können die Auflösungen derselben in zwei Theilen dargestellt werden, wenn man für den ersten Theil die Bedingungsgleichung $\alpha = \varkappa + 1$ nebst der veränderlichen Gröfse $\varkappa$ hinzufügt, für den andern aber $\alpha = 0$ setzt.

2.) *Zusatz.* Die eingeführte Bedingungsgleichung $\alpha = \varkappa + 1$, nebst der veränderlichen Gröfse α kann man im ersten Theile nach §. 14. wieder wegschaffen.

3.) *Zusatz.* Wenn nach der Natur der anfangs gegebenen Bedingungsgleichungen α nothwendig eine ganze positive Zahl seyn mufs, und nicht Null seyn kann, so kann ohne Bedenken die Bedingungsgleichung $\alpha = \varkappa + 1$ hinzugefügt werden.

4.) *Zusatz.* Wenn hingegen nach der Natur eben dieser Bedingungsgleichungen α nothwendig Null seyn mufs, so kann auch überall 0 statt α gesetzt werden.

§. 26.

Lehrsatz.

Wenn unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α *vorkommt, so ist dasselbe der Summe zweier andern*

gleich, die aus dem vorigen entstehen, wenn man erstens im allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen $\alpha + 1$ statt α setzt, und zweitens im allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen $\alpha = 0$ setzt, und α aus dem Verzeichnisse der veränderlichen Grösen wegläfst.

Beweis. Nach (§. 25. 1.) Zus.) ist das vorgelegte Integral der Summe zweier andern gleich, wovon das erstere aus dem gegebenen entsteht, wenn man die Bedingungsgleichung $\alpha = x + 1$ nebst der veränderlichen Grösse x hinzufügt, das andere aber, wenn man $\alpha = 0$ setzt. — — So enthält der erstere Theil α, die übrigen veränderlichen Grösen und x. — — In gedachtem ersten Theile kann man nach §. 15. die neu eingeführte Bedingungsgleichung $\alpha = x + 1$ und veränderliche Grösse α wegschaffen, wenn man überall statt α den Werth $x + 1$ substituirt. — — So erhält man ein combinatorisches Integral, worinnen nicht mehr α dagegen aber x als veränderliche Grösse vorkommt. — — In diesem kann man nach (§. 2. 2.) Zus.) statt x wieder α setzen, und so erhält man für den ersten Theil gerade das Integral, so wie es im Lehrsatze beschrieben war.

1.) *Zusatz.* Ist das allgemeine Glied eines combinatorischen Integrals, unter dessen veränderlichen Grösen α vorkommt, so beschaffen, dafs es für $\alpha = 0$ verschwindet, oder kann nach der Natur der Bedingungsgleichungen α nicht Null seyn, so kann ohne Bedenken im allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen $\alpha + 1$ statt α gesetzt werden.

2.) *Zusatz.* Ist hingegen das allgemeine Glied so beschaffen, dafs es allemal verschwindet, wenn α eine ganze positive Zahl ist, und nur dann einen Werth beibehält, wenn $\alpha = 0$ ist, oder mufs nach der Natur der Bedingungsgleichungen α nothwendig Null seyn, so kann auch ohne Bedenken α aus dem Verzeichnisse der veränderlichen Grösen weggelassen, und in dem allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen 0 statt α gesetzt werden.

§. 27.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröſsen, worunter α *nicht aber* $\varkappa$ *befindlich ist, Bedingungsgleichungen gegeben sind, und* $\mathfrak{m}$ *eine ganze nicht negative unveränderliche Zahl bedeutet; so werden diejenigen Auflösungen, worinnen* $\alpha \geqq \mathfrak{m}$ *ist, von denen, worinnen* $\alpha < \mathfrak{m}$ *ist, abgesondert dargestellt, wenn man für die erstern die Bedingungsgleichung* $\alpha = \mathfrak{m} + \varkappa$, *für die andern aber die Bedingungsgleichung* $\alpha + \varkappa = \mathfrak{m} - 1$, *nebst der veränderlichen Gröfse* $\varkappa$ *hinzufügt.*

Beweis. Ist überflüssig.

1.) *Zusatz.* Die eingeführte Bedingungsgleichung $\alpha = \mathfrak{m} + \varkappa$ nebst der veränderlichen Gröfse α kann man im ersten Theile nach §. 14. wieder wegschaffen.

2.) *Zusatz.* Wenn nach der Natur der anfangs gegebenen Bedingungsgleichungen α nicht kleiner als $\mathfrak{m}$ seyn kann, so kann ohne Bedenken die Bedingungsgleichung $\alpha = \mathfrak{m} + \varkappa$ hinzugefügt werden.

3.) *Zusatz.* Wenn hingegen nach der Natur eben dieser Bedingungsgleichungen α kleiner als $\mathfrak{m}$ seyn mufs, so kann ohne Bedenken die Bedingungsgleichung $\alpha + \varkappa = \mathfrak{m} - 1$ beigefügt werden.

Anmerkung. Für $\mathfrak{m} = 0$ verschwindet der letzte Theil, und für $\mathfrak{m} = 1$ erhält man das, was in §. 25. gesagt worden ist, mit Zuziehung von (§. 16. 1.) Zus.), wenn man α und $\varkappa$ für den Theil (Δ), und die Bedingungsgleichung $\alpha + \varkappa = \mathfrak{m} - 1 = 0$ für den Theil (D) annimmt.

§. 28.

Lehrsatz.

Wenn unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α *nicht aber* $\varkappa$ *vorkommt, und* $\mathfrak{m}$ *irgend eine unveränderliche ganze nicht negative Zahl bedeutet; so ist dies Integral der Summe zweier andern gleich, wovon das erste aus vorigem erhalten wird,*

wenn man in dem allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen $m + \alpha$ *statt* α *setzt, das andere aber, wenn die veränderliche Gröfse* $\varkappa$ *mit der Bedingungsgleichung* $\alpha + \varkappa = m - 1$ *hinzukommt.*

Beweis. Nach (§. 27.) läfst sich das gegebene Integral in zwei Theile zertheilen, welche aus ihm entstehen, wenn $\varkappa$ den veränderlichen Gröfsen, und die Bedingungsgleichung $\alpha = m + \varkappa$ für den ersten, $\alpha + \varkappa = m - 1$ aber, für den andern Theil hinzugefügt wird. — — So enthält der erste Theil α, $\varkappa$ und die übrigen veränderlichen Gröfsen. — In gedachtem ersten Theile kann man nach §. 15. die neu eingeführte Bedingungsgleichung $\alpha = m + \varkappa$ und veränderliche Gröfse α wegschaffen, wenn man überall statt α den Werth $m + \varkappa$ substituirt. — — So erhält man ein combinatorisches Integral, worinnen nicht mehr α, dagegen aber $\varkappa$ als veränderliche Gröfse vorkommt. — — In diesem kann man nach (§. 2. 2.) Zus.) statt $\varkappa$ wieder α setzen, und so erhält man für den ersten Theil gerade das Integral, so wie es im Lehrsatze beschrieben war.

1.) *Zusatz.* Wenn das allgemeine Glied eines combinatorischen Integrals, unter dessen veränderlichen Gröfsen α vorkommt, so beschaffen ist, dafs es verschwindet, wenn $\alpha < m$ ist, wo m eine bestimmte unveränderliche ganze nicht negative Zahl bedeutet, so kann in dem allgemeinen Gliede und Bedingungsgleichungen überall $m + \alpha$ statt α gesetzt werden.

2.) *Zusatz.* Wenn das allgemeine Glied eines combinatorischen Integrals, unter dessen veränderlichen Gröfsen α nicht aber $\varkappa$ vorkommt, so beschaffen ist, dafs es verschwindet, wenn $\alpha \geqq m$ ist, wo m eine bestimmte unveränderliche ganze nicht negative Zahl bedeutet; so kann ohne Bedenken die Bedingungsgleichung $\alpha + \varkappa = m - 1$ nebst der veränderlichen Gröfse $\varkappa$ hinzukommen.

Anmerkung. Für $m = 0$ verschwindet der letzte Theil, und für $m = 1$ erhält man das, was in §. 26. gesagt worden mit Zuziehung von (§. 17. 2.) Zus.), wenn man α und $\varkappa$ für den Theil (Δ) und $\alpha + \varkappa = m - 1$ oder $\alpha + \varkappa = 0$ für den Theil (D) annimmt.

§. 29.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröfsen, worunter α und β, nicht aber x vorkommen, Bedingungsgleichungen gegeben sind; so werden alle Auflösungen, worinnen $\alpha \gtreqless \beta$, von denen gesondert, worinnen ist, $\alpha < \beta$, wenn man die veränderliche Gröfse x, und für die erstern die Bedingungsgleichung $\alpha = \beta + x$, für die andern aber $\alpha + x + 1 = \beta$ hinzufügt.

Beweis. Ist überflüssig.

1.) *Zusatz.* Wenn für einige veränderliche Gröfsen, worunter α und β, nicht aber x befindlich ist, Bedingungsgleichungen gegeben sind, so erhält man die Auflösung derselben in zwei Theile getrennt, wenn man diesen Bedingungsgleichungen einmal $\alpha = \beta + x$, dann $\alpha + x + 1 = \beta$, den veränderlichen Gröfsen aber x beifügt.

2.) *Zusatz.* Sind die neuen Bedingungsgleichungen eingeführt, so kann man selbige, und im ersten Theile α im andern β nach (§. 14.) wieder wegschaffen.

3.) *Zusatz.* Wenn nach der Natur der gegebenen Bedingungsgleichungen nothwendig $\alpha \gtreqless \beta$ ist, so kann man ohne Bedenken die Bedingungsgleichung $\alpha = \beta + x$, nebst der veränderlichen Gröfse x hinzufügen.

4.) *Zusatz.* Ist hingegen nach der Natur der gegebenen Bedingungsgleichungen nothwendig $\alpha < \beta$, so kann man ohne Bedenken die Bedingungsgleichung $\alpha + x + 1 = \beta$, nebst der veränderlichen Gröfse x hinzufügen.

§. 30.

Lehrsatz.

Wenn unter den veränderlichen Gröfsen eines combinatorischen Integrals α und β vorkommen, so läfst sich selbiges in die Summe

zweier andern zertheilen, wovon das erstere gefunden wird, wenn $\beta + \alpha$ *statt* α, *das andere aber, wenn* $\alpha + \beta + 1$ *statt* β *in dem allgemeinen Gliede und allen Bedingungsgleichungen gesetzt wird.*

Beweis. Nach (§. 29. 1.) Zus.) läfst sich das gegebene Integral in zwei andere zertheilen, die aus vorigem entstehen, wenn $\varkappa$ den veränderlichen Gröfsen, und für den *ersten* Theil die Bedingungsgleichung $\alpha = \beta + \varkappa$, für den *andern* $\alpha + \varkappa + 1 = \beta$ beigefügt wird. — — So erhält man zwei Integrale, worinnen α, β, $\varkappa$ nebst den übrigen veränderlichen Gröfsen vorkommen. — — Nach §. 15. kann man im ersten Theile die veränderliche Gröfse α, im andern aber β nebst der neu eingeführten Bedingungsgleichung wieder wegschaffen, wenn man im allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen für den ersten Theil $\beta + \varkappa$ statt α, für den andern $\alpha + \varkappa + 1$ statt β substituirt. — — So enthält der erste Theil β, $\varkappa$, der andere aber α, $\varkappa$ nebst den übrigen veränderlichen Gröfsen. — — Da also im ersten Theile α, im andern β nicht mehr vorkommt, so kann man nach (§. 2. 2.) Zus.) im ersten α, im andern β statt $\varkappa$ setzen, und erhält so die Integrale, wovon im Lehrsatze die Rede war.

1.) *Zusatz.* Ist das allgemeine Glied eines combinatorischen Integrals, unter dessen veränderlichen Gröfsen α und β vorkommen, so beschaffen, dafs es verschwindet, wenn $\alpha < \beta$ ist, so kann man ohne Bedenken $\beta + \alpha$ statt α im allgemeinen Gliede und allen Bedingungsgleichungen substituiren.

2.) *Zusatz.* Ist das allgemeine Glied eines combinatorischen Integrals, unter dessen veränderlichen Gröfsen α und β vorkommen, so beschaffen, dafs es verschwindet, wenn $\alpha \geqq \beta$ ist, so kann man ohne Bedenken $\alpha + \beta + 1$ statt β im allgemeinen Gliede und den Bedingungsgleichungen substituiren.

§. 31.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröſsen, worunter jedoch x *nicht befindlich ist, Bedingungsgleichungen gegeben sind, und* K *eine ganze Zahl bedeutet, die entweder unveränderlich, oder auch auf irgend eine Art aus den veränderlichen Gröſsen zusammengesetzt ist; so werden alle Auflösungen der Bedingungsgleichungen, worinnen* K *eine ganze nicht negative Zahl ist, und diejenigen, worinnen* K *eine ganze negative Zahl ist, abgesondert dargestellt, wenn man für die erstern die Bedingungsgleichung* $x = K$, *für die andern aber* $x = -K-1$ *nebst der veränderlichen Gröſse* x *hinzufügt.*

Beweis. Ist eine von den beiden Gröſsen K und $-K-1$ eine ganze nicht negative Zahl, so ist die andere eine ganze negative Zahl, und umgekehrt ist die eine eine ganze negative Zahl, so ist die andere eine ganze nicht negative Zahl. Durch Hinzufügung der Bedingungsgleichung $x = K$ werden also alle diejenigen Auflösungen beibehalten, worinnen K eine ganze nicht negative Zahl, und diejenigen ausgeschlossen, worinnen K eine ganze negative Zahl ist. Durch Hinzufügung der Bedingungsgleichung $x = -K-1$ hingegen, werden diejenigen beibehalten, worinnen $-K-1$ eine ganze nicht negative, das heifst keine ganze negative Zahl ist, und diejenigen ausgeschlossen worinnen, $-K-1$ eine ganze negative, das heifst K eine ganze nicht negative Zahl ist.

Anmerkung. Für $K = \alpha - \beta$, oder $K - \beta - \alpha = 1$ erhält man hieraus das, was schon in §. 29. gesagt worden.

§. 32.

Lehrsatz.

Wenn unter den veränderlichen Gröſsen eines combinatorischen Integrals x *nicht befindlich ist, und* K *eine ganze Zahl bedeutet,*

die entweder unveränderlich, oder auch auf irgend eine Art aus den veränderlichen Gröſsen des combinatorischen Integrals zusammengesetzt ist; so ist dies Integral der Summe zweier andern gleich, die aus vorigem entstehen, wenn $\varkappa$ *den veränderlichen Gröſsen, und die Bedingungsgleichung* $\varkappa = K$ *für das erste,* $\varkappa = -K-1$ *für das andere den Bedingungsgleichungen beigefügt wird.*

Beweis. Folgt aus vorigem Lehrsatze.

Zusatz. Verschwindet das allgemeine Glied des gegebenen combinatorischen Integrals, wenn K eine ganze negative Zahl wird, so kann man ohne Bedenken $\varkappa = K$ den Bedingungsgleichungen, und $\varkappa$ den veränderlichen Gröſsen beifügen.

§. 33.

Lehrsatz.

Wenn für einige veränderliche Gröſsen, worunter α, *nicht aber* $\varkappa$, λ, μ *befindlich, Bedingungsgleichungen gegeben sind, so können den veränderlichen Gröſsen* $\varkappa$, λ, μ, *den Bedingungsgleichungen aber* $\alpha = \varkappa^2 + \lambda$, $\lambda + \mu = 2\varkappa$ *beigefügt werden.*

Beweis. Man ziehe aus α die genäherte Quadratwurzel aus, so kann diese für $\varkappa$, und der Rest für λ angenommen werden. Nun ist der Rest niemals gröſser als die doppelte Wurzel, folglich $\lambda \leqq 2\varkappa$, mithin $0 \leqq 2\varkappa - \lambda$, oder $0 \leqq \mu$, mithin wird auch μ eine ganze nicht negative Zahl. Nähme man $\varkappa$ gröſser an als vorhin, so würde λ, und nähme man es kleiner an, μ negativ, welches nicht seyn darf.

Zusatz. Dasselbe gilt, wenn unter den veränderlichen Gröſsen eines combinatorischen Integrals α nicht aber $\varkappa$, λ, μ vorkäme. Auch dann könnte man gedachte drei Buchstaben den veränderlichen Gröſsen, und $\alpha = \varkappa^2 + \lambda$, $\lambda + \mu = 2\varkappa$ den Bedingungsgleichungen beifügen.

§. 34.

Von der Darstellung unendlicher Reihen durch combinatorische Integrale, und von ihren verschiedenen Ordnungen.

Die Bedingungsgleichung $\beta - \alpha = 2$, und viele andere lassen eine unendliche Menge Auflösungen zu. Ein combinatorisches Integral also, dem eine solche Bedingungsgleichung zum Grunde liegt, besteht auch aus unendlich viel Gliedern, oder ist eine unendliche Reihe. Es erhellet also, dafs unendliche Reihen auch durch combinatorische Integrale dargestellt werden können, und darunter begriffen sind.

Vorzüglich aber ist zu bemerken, dafs es combinatorische Integrale giebt, wobei *gar keine Bedingungsgleichung* vorkommt, und alle solche stellen unendliche Reihen vor.

Wenn nehmlich nur *eine* veränderliche Gröfse α, aber keine Bedingungsgleichung vorhanden ist, so ist das Integral eine unendliche Reihe, deren Glieder herauskommen, wenn im allgemeinen Gliede statt α nach und nach 0, 1, 2, 3 u. s. w. ins unendliche gesetzt wird. So ist z. B.

$$\int x^{\alpha} = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$$

Ein solches Infinitinomium mag eine unendliche Reihe *der ersten Ordnung* oder *von einer Dimension* heifsen. — — Sind hingegen *zwei veränderliche* Gröfsen α, β, aber wieder keine Bedingungsgleichung vorhanden, so ist das Integral die unendliche Reihe, die entsteht, wenn statt α und β im allgemeinen Gliede alle nur mögliche ganze nicht negative Zahlen gesetzt werden. So ist z. B.

$$\begin{aligned}\int x^{\alpha} y^{\beta} = {} & x^0 y^0 + x^0 y^1 + x^0 y^2 + \text{etc.} \\ & + x^1 y^0 + x^1 y^1 + x^1 y^2 + \text{etc.} \\ & + x^2 y^0 + x^2 y^1 + x^2 y^2 + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.}\end{aligned}$$

und eine solche mag eine unendliche Reihe der *zweiten Ordnung* oder von *zwei Dimensionen* genannt werden. — — Eben so wird man ein-

sehen, dafs, wenn keine Bedingungsgleichung, aber *drei* veränderliche Gröfsen α, β, γ vorhanden sind, eine unendliche Reihe *von der dritten Ordnung* oder *von drei Dimensionen* entstehe, und eine solche läfst sich nicht einmal füglich in einer Ebene darstellen. — Man wird nun auch leicht einsehen, was unter combinatorischen Integralen mit *vier*, *fünf* u. s. w. veränderlichen Gröfsen, aber gar keinen Bedingungsgleichungen zu verstehen sey, und dafs diese unendliche Reihen der *vierten*, *fünften* u. s. w. *Ordnung*, oder von *vier*, *fünf* u. s. w. *Dimensionen* geben.

1.) *Zusatz.* Selbst aber auch auf den Fall, dafs Bedingungsgleichungen vorhanden sind, kann das combinatorische Integral eine unendliche Reihe seyn. Wären z. B. die beiden veränderlichen Gröfsen α, β und die Bedingungsgleichung $7.\alpha - 11.\beta = 2$ vorhanden, so hätte man eine unendliche Reihe *der ersten Ordnung*; wären drei veränderliche Gröfsen α, β, γ und die Bedingungsgleichung $\alpha + \beta = m$ (wo m eine ganze nicht negative Zahl ist) vorhanden, so erhielte man $m + 1$ unendliche Reihen der ersten Ordnung; wären wieder drei veränderliche Gröfsen α, β, γ, aber die Bedingungsgleichung $\alpha + \beta = 2.\gamma$ vorhanden, so hätte man eine unendliche Reihe die auch zur zweiten Ordnung gerechnet werden könnte.

2.) *Zusatz.* Was nun bisher von combinatorischen Integralen mit einer *endlichen* Anzahl Glieder gesagt worden ist, gilt auch, wenn die Anzahl der Glieder *unendlich* seyn sollte, oder von einer unendlichen durch ein combinatorisches Integral dargestellten Reihe.

3.) *Zusatz.* Was ferner von *jeder* Anzahl Bedingungsgleichungen bisher bewiesen worden, gilt auch, wenn *gar keine* Bedingungsgleichungen da sind.

4.) *Zusatz.* So wie es combinatorische Integrale giebt mit gar keiner Bedingungsgleichung, aber einer, zwei oder mehrern veränderlichen Gröfsen, eben so lassen sich umgekehrt solche der Analogie nach

denken, wo *gar keine veränderlichen Gröfsen*, dagegen aber Bedingungsgleichungen vorhanden sind, welche also natürlich nur unveränderliche Gröfsen enthalten können. Sind die unveränderlichen Gröfsen von der Beschaffenheit, dafs diese Gleichungen oder Relationen wirklich statt finden, so ist der Werth des combinatorischen Integrals dem allgemeinen Gliede gleich, im Gegentheil aber $= 0$.

5.) *Zusatz.* Sollte endlich weder Bedingungsgleichung noch veränderliche Gröfse vorhanden seyn, so ist ebenfalls der Werth des combinatorischen Integrals dem allgemeinen Gliede gleich.

Erklärung der hier vorkommenden Bezeichnungen.

§. 35.

Erklärungen und Sätze von Factoriellen.

Ein Product aus mehrern Factoren, die in arithmetischer Progression fortgehen, wie

$$a\,(a+r)\,(a+2r)\,(a+3r)\ldots(a+(m-1)r)$$

mag nach *Kramp* (*) auf folgende Art

$$a^{m\,|\,r}$$

bezeichnet werden. Dergleichen Producte nennt *Kramp* in erwähntem Werke auf *Arbogast's* Veranlassung *Factorielles*, da er in seinem frühern Werke (**) ihnen die Benennung *Facultés* beigelegt hatte.

Der erste Factor a heifst die *Basis*, die beständige Differenz r die *Differenz*, und die Anzahl der Factoren m der *Exponent*.

Man nennt die Factorielle *steigend* oder *fallend*, je nachdem die Differenz r *positiv* oder *negativ* ist. Ist sie $= 0$, so verwandelt sich die Factorielle in eine Potenz.

(*) Élémens d'Arithmétique vniverselle. Cologne 1808. Chap. XXV.

(**) Analyse des refractions astronomiques et terrestres. Leipsic. 1799. Chap. III.

Liefst man die Factoren der vorhin angegebenen Factorielle rückwärts, so bekommt man eine andere, deren Basis $a + (m-1)r$, Differenz $-r$, und Exponent wie vorhin m ist. Daraus ergiebt sich sogleich die Gleichung

1) $a^{m\,|\,r} = (a + mr - r)^{m\,|\,-r}$

Multiplicirt man jeden Factor der obigen Factorielle mit h, also das ganze mit h^m, so erhält man eine andere, deren Basis und Differenz h mal so grofs wie vorher, der Exponent aber der nehmliche ist, und dies giebt die Gleichung

2) $h^m\, a^{m\,|\,r} = (h\,a)^{m\,|\,hr}$

Setzt man hier $h = -1$, so bekommt man mit Zuziehung der vorigen Gleichung

3) $(-1)^m\, a^{m\,|\,r} = (r - a - mr)^{m\,|\,r}$

Sondert man den letzten Factor von den übrigen ab, so erhält man die Gleichung

4) $a^{m+1\,|\,r} = a^{m\,|\,r} \cdot (a + mr)$

Sondert man aber den ersten Factor von den übrigen ab, so erhält man die Gleichung

5) $a^{m+1\,|\,r} = a\,(a + r)^{m\,|\,r}$

Sondert man allgemeiner bei der Factorielle $a^{m+n\,|\,r}$ die letzten n Factoren von den ersten m Factoren ab, so ergiebt sich

6) $a^{m+n\,|\,r} = a^{m\,|\,r}\,(a + mr)^{n\,|\,r}$

Es ist derowegen auch

7) $a^{m\,|\,r}\,(a + mr)^{n\,|\,r} = a^{n\,|\,r}\,(a + nr)^{m\,|\,r}$

Multiplicirt man bei einer Factorielle, wo der Exponent gerade ist, die Factoren in den geraden, und die in den ungeraden Stellen insbesondere mit einander, so erhält man

8) $a^{2m\,|\,r} = a^{m\,|\,2r}\,(a + r)^{m\,|\,2r}$

und diese Formel mit $a + 2mr$ multiplicirt, giebt nach 4)

9) $a^{2m+1\,|\,r} = a^{m+1\,|\,2r}\,(a + r)^{m\,|\,2r}$

Setzt man in 8) $a = r = 1$, so erhält man $1^{2m1r} = 1^{m1r}\ 2^{m1r}$. Nun ist nach 6) $1^{2m1r} = 1^{m1r}.\ (m+1)^{m1r}$, und nach 2) $2^{m1r} = 2^{m}.\ 1^{m1r}$. Daraus ergiebt sich $(m+1)^{m1r} = 2^{m}.\ 1^{m1r}$, oder, welches nach 2) einerlei ist

10) $(m+1)^{m1r} = 2^{m14}$

und diese Gleichung multiplicirt mit $2(1+2m) = 2+4m$ giebt nach 4)

11) $2.(m+1)^{m+11r} = 2^{m+114}$

Durch ähnliche Betrachtungen wie oben die Formeln 8) und 9) gefunden worden, erhält man

12) $a^{3m1r} = a^{m13r}\ (a+r)^{m13r}\ (a+2r)^{m13r}$

13) $a^{3m+11r} = a^{m+113r}\ (a+r)^{m13r}\ (a+2r)^{m13r}$

14) $a^{3m+21r} = a^{m+113r}\ (a+r)^{m+113r}\ (a+2r)^{m13r}$

u. s. w.

1.) *Zusatz.* Aus der Formel 4) folgt umgekehrt

$$a^{m1r} = a^{m+11r} : (a+mr)$$

Setzt man hier statt m die Zahlen 1 und 0, so findet sich

$$a^{11r} = a^{21r} : (a+r) = a.\ (a+r) : (a+r) = a$$

$$a^{01r} = a^{11r} : a = a : a = 1$$

Ist demnach der Exponent 1, so ist die Factorielle der Basis gleich, und ist der Exponent 0, so ist sie allemal 1. In beiden Fällen hat also die Differenz keinen Einfluſs auf den Werth der Factorielle.

2.) *Zusatz.* Geht man noch weiter rückwärts, oder setzt man statt m die Werthe $-1, -2, -3$ u. s. w. so erhält man ferner nach der Analogie

$$a^{-11r} = a^{01r} : (a-r) = 1 : (a-r)$$

$$a^{-21r} = a^{-11r} : (a-2r) = 1 : (a-r)\ (a-2r)$$

$$a^{-31r} = a^{-21r} : (a-3r) = 1 : (a-r)\ (a-2r)\ (a-3r)$$

u. s. w. und allgemein

$$a^{-n1r} = 1 : (a-r)\ (a-2r)\ (a-3r) \ldots (a-nr)$$

oder

15) $a^{-n1r} = 1 : (a-r)^{n1-r} = 1 : (a-nr)^{n1r}$

3.) *Zusatz.* Auf das nehmliche Resultat käme man, wenn man in der Formel 6) sich erlaubte, statt m den Werth - n zu setzen; man erhielte dann $a^{o|r} = a^{-n|r}\ (a-n\,r)^{n|r}$, oder welches nach 1.) Zus. einerlei ist $1 = a^{-n|r}.\ (a-n\,r)^{n|r}$ woraus dasselbe folgt.

4.) *Zusatz.* Nach dem was so eben über die Bedeutung von Factoriellen mit ganzen negativen Exponenten erinnert worden, ist leicht einzusehen, dafs die Formeln 1), 2), 3), 4), 5), 8), 9), 12), 13), 14) auch wahr verbleiben, wenn man statt m eine ganze negative Zahl setzt, und dafs die Formeln 6) und 7) ebenfalls wahr verbleiben, wenn man entweder nur einem von den beiden Buchstaben m und n, oder auch beiden einen ganzen negativen Werth beilegt. In den Formeln 10) und 11) hingegen darf man dem Buchstaben m keinen ganzen negativen Werth beilegen. Setzte man nehmlich in 10) und 11) — n - 1 statt m, so erhielte man

$$(-n)^{-n-1|1} = 2^{-n-1|4}$$
$$2.(-n)^{-n|1} = 2^{-n|4}$$

Diese beiden Formeln sind aber unrichtig. Setzt man nehmlich in der Formel 15) statt a, n, r erstens - n, n + 1, 1, zweitens 2, n + 1, 4, drittens - n, n, 1 und viertens 2, n, 4 so erhält man mit Zuziehung von 2)

$$(-n)^{-n-1|1} = 1 : (-n-1)^{n+1|1-1} = 1 : (-1)^{n+1}(n+1)^{n+1|1}$$
$$2^{-n-1|4} = 1 : (-2)^{n+1|1-4} = 1 : (-1)^{n+1}\ 2^{n+1|4}$$
$$(-n)^{-n|1} = 1 : (-n-1)^{n|1-1} = 1 : (-1)^{n}\ (n+1)^{n|1}$$
$$2^{-n|4} = 1 : (-2)^{n|1-4} = 1 : (-1)^{n}\ 2^{n|4}$$

Nun ist nach 10) und 11), wenn man n statt m setzt

$$(n+1)^{n|1} = 2^{n|4}$$
$$2.(n+1)^{n+1|1} = 2^{n+1|4}$$

also

$$(-n)^{-n-1|1} = 2.2^{-n-1|4}$$
$$(-n)^{-n|1} = 2^{-n|4}$$

woraus erhellet, dafs die vorhin angeführten beiden Formeln unrichtig sind.

Anmerkung. *Kramp* betrachtet in seinem frühern Werke auch Factoriellen mit *gebrochenen Exponenten.* Von dieser Betrachtung können wir aber um so mehr abstrahiren, als wir erstens dergleichen Factoriellen *hier* nicht brauchen, und zweitens sich *Kramp* bei Aufstellung seiner Theorie von solchen Factoriellen in Widersprüche verwickelte, die er selbst nicht heben konnte.

§. 36.

Die besonders häufig vorkommende Factorielle $1^{n|1}$ oder $n^{n|-1}$ mag nach *Kramp* (*) hier durch n' bezeichnet werden.

Diesem nach ist $0' = 1$, $1' = 1$, $2' = 2$, $3' = 6$, $4' = 24$, $5' = 120$ u. s. w. und rückwärts $\infty = (-1)' = (-2)' = (-3)'$ u. s. w. also $0 = \frac{1}{(-1)'} = \frac{1}{(-2)'} = \frac{1}{(-3)'}$ u. s. w.

1.) *Zusatz.* Es ist daher nach [§. 35. 1) und 6)] wenn auch m Null oder eine ganze positive Zahl ist

$$(m+n)^{m|-1} = (n+1)^{m|1} = \frac{(m+n)'}{n'}.$$

2.) *Zusatz.* Für $m = 1$ hat man hieraus als besondern Fall

$$n+1 = \frac{(n+1)'}{n'},\quad n'(n+1) = (n+1)',\quad \frac{n+1}{(n+1)'} = \frac{1}{n'}.$$

3.) *Zusatz.* Ist n Null oder eine ganze positive Zahl, so ist nach [§. 35. 4) und 5)]

$$(a+r)^{n+1|r} = (a+r)^{n|r}(a+r+nr),\quad a^{n+1|r} = a(a+r)^{n|r}$$

also, wenn man abzieht

$$(a+r)^{n+1|r} - a^{n+1|r} = (n+1)\,r\,(a+r)^{n|r}.$$

Da aber nach vorigem Zusatze

$$(n+1)' = (n+1)\,n'$$

(*) Diese Bezeichnung braucht *Kramp* in seinem *frühern* Werke. In dem *spätern* setzt er statt dessen n!, allein mich dünkt, dafs die erstere Bezeichnungsart den Vorzug verdiene.

so hat man auch

$$\frac{(a+r)^{n+1|r} - a^{n+1|r}}{(n+1)'} = \frac{r(a+r)^{n|r}}{n'}$$

§. 37.

Kurze Bezeichnung der Binomialcoefficienten nebst einigen Relationen derselben.

Den Bruch $\frac{m^{n|-1}}{n'}$, oder den n ten Binomialcoefficienten von der Potenz m wollen wir kurz durch m_n bezeichnen (*). Es ist derowegen

$$m_0 = 1,\ m_1 = \frac{m}{1},\ m_2 = \frac{m.(m-1)}{1.\ 2},\ m_3 = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

u. s. w.

1.) *Zusatz.* Rückwärts hat man $m_{-1} = \frac{0}{m+1}$

$m_{-2} = \frac{0.(-1)}{(m+1).(m+2)}$, $m_{-3} = \frac{0.(-1).(-2)}{(m+1).(m+2).(m+3)}$ und allgemein $m_{-n} = \frac{m^{-n|-1}}{1^{-n|1}} = \frac{0^{n|-1}}{(m+1)^{n|r}}$.

In dieser letztern Formel ist, wenn n eine ganze positive Zahl ist, der Zähler *allemal*, der Nenner aber nur dann gleich 0, wenn m eine der n Zahlen $-1, -2, -3$ u. s. w. bis $-n$ ist. Ist dies also nicht der Fall, so ist entschieden $m_{-n} = 0$.

2.) *Zusatz.* Nach [§. 36. 1.) Zus.] ist, wenn m und n Null oder ganze positive Zahlen bedeuten,

$$\frac{(m+n)'}{n'} = (m+n)^{m|-1}$$

(*) *Hindenburg* bezeichnet die Binomialcoefficienten der Potenz m, nehmlich:

$$\frac{m}{1},\ \frac{m.(m-1)}{1.\ 2},\ \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3},\ \ldots\ \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n}$$

auf folgende Art:

$^{m}\mathfrak{A},\ ^{m}\mathfrak{B},\ ^{m}\mathfrak{C},\ \ldots\ldots\ ^{m}\mathfrak{N}.$

Die oben angegebene Bezeichnungsart scheint mir in jeder Rücksicht vorzüglicher.

also auch

$$\frac{(m+n)^{\prime}}{m^{\prime}\ n^{\prime}} = \frac{(m+n)^{m\dagger-1}}{m^{\prime}}$$

oder

$$\frac{(m+n)^{\prime}}{m^{\prime}\ n^{\prime}} = (m+n)_m$$

3.) *Zusatz.* Es ist daher unter eben der Voraussetzung

$$(m+n)_m = (m+n)_n$$

4.) *Zusatz.* Unter eben der Voraussetzung ist

$$m_{m+n+1} = 0.$$

5.) *Zusatz.* Nach [§. 35. 3)] ist, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl ist, was auch m bedeuten mag, $(-1)^n\ m^{n\dagger-1} = (n-1-m)^{n\dagger-1}$ also durch $n^{\prime}$ dividirt

$$(-1)^n\ m_n = (n-1-m)_n$$

6.) *Zusatz.* Bedeutet daher auch m Null oder eine ganze positive Zahl, so ist nach 3.) Zus.

$$(-1)^n\ (-m-1)_n = (m+n)_n = (m+n)_m = (-1)^m\ (-n-1)_m$$

7.) *Zusatz.* Unter der nehmlichen Voraussetzung ist, was auch a bedeuten mag, nach [§ 35 6)]

$$\frac{a^{m+n\dagger-1}}{m^{\prime}\ n^{\prime}} = \frac{a^{m\dagger-1}\ (a-m)^{n\dagger-1}}{m^{\prime}\ n^{\prime}} = \frac{a^{n\dagger-1}\ (a-n)^{m\dagger-1}}{n^{\prime}\ m^{\prime}}$$

also nach 2.) und 3.) Zus.

$$(m+n)_m\ a_{m+n^{\prime}} = (m+n)_n\ a_{m+n} = a_m\ (a-m)_n = a_n\ (a-n)_m$$

8.) *Zusatz.* Hieraus folgt leicht

$$(n+1)\ (a+1)_{n+1} = (a+1)\ a_n$$

$$(n+1)\ a_{n+1} = a_n\ (a-n)$$

also, wenn man subtrahirt, und durch $n+1$ dividirt,

$$(a+1)_{n+1} - a_{n+1} = a_n$$

und diese Formel gilt, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl ist, was auch a für einen Werth haben mag.

9.) *Zusatz.* Erlaubt man sich in dieser Formel für n auch ganze *negative* Zahlen zu setzen, so erhält man

für $n = -1$ $\quad (a+1)_0 - a_0 = 1-1 = 0 = a_{-1}$
für $n = -2$ $\quad (a+1)_{-1} - a_{-1} = 0-0 = 0 = a_{-2}$

u. s. w. Nach *dieser* Analogie hätte man also allemal, wenn n eine ganze positive Zahl ist, $a_{-n} = 0$, es mag a bedeuten was es will, also würde diese Formel auch dann noch gelten, wenn a eine von den n Zahlen $-1, -2$, u. s. w. bis $-n$ seyn sollte.

10.) *Zusatz.* Erlaubt man sich hingegen in der Formel des 3.) Zusatzes $-m-n-1$ statt m zu setzen, so erhielte man nach der Analogie

$$(-m-1)_{-m-n-1} = (-m-1)_n$$

11.) *Zusatz.* Erlaubte man sich in der Formel des 6.) Zusatzes $-m-n-1$ statt n zu setzen, so erhielte man

$$(-1)^{-m-n-1}\,(-m-1)_{-m-n-1} = (-n-1)_m$$

Es ist aber auch nach derselben Formel

$$(-1)^m\,(-n-1)_m = (-1)^n\,(-m-1)_n$$

man erhielte also

$$(-1)^{-n-c}\,(-m-1)_{-m-n-1} = (-1)^n\,(-m-1)_n$$

oder

$$(-m-1)_{-m-n-1} = -(-m-1)_n$$

12.) *Zusatz.* Die Formeln des 10.) und 11.) Zusatzes geben also für $(-m-1)_{-m-n-1}$ entgegengesetzte Werthe, deren keiner Null ist, während nach 9.) Zus. dieser Binomialcoefficient Null seyn sollte.

Anmerkung. Hinsichtlich dieses Widerspruchs bemerke ich, dafs nach meinem Erachten das Resultat des 9.) Zusatzes das richtige, oder allemal $(-m-1)_{-m-n-1} = 0$ seyn müsse. Denn das Gesetz der Stetigkeit würde zu sehr unterbrochen werden, wenn z. B. der Ausdruck a_{-5} allemal Null wäre, und nur bei den fünf Werthen $-1, -2, -3, -4, -5$ von a eine Ausnahme statt fände. Uebrigens brauchen wir diese Schwierigkeit hier gar nicht zu berücksichtigen, da in der Folge niemals ein Binomialcoefficient m_n vorkommen wird, wobei n eine ganze negative Zahl wäre.

Anwendungen auf die Analysis.

§. 38.

Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten nebst verwandten Sätzen.

So bekannt dieser Satz auch ist, so stelle ich ihn doch hier in der Absicht auf, um zu zeigen, wie kurz er durch combinatorische Integrale nicht nur *dargestellt*, sondern auch durch deren Calcul erwiesen werden kann.

In dem combinatorischen Integrale

$$\int \frac{\alpha\, a^{\alpha}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha + \beta = m + 1$$

verschwindet das allgemeine Glied für $\alpha = 0$. Es kann daher nach [§. 26. 1.) Zus.] statt α überall $\alpha + 1$ gesetzt werden, und so ist es demnach auch gleich dem combinatorischen Integrale

$$\int \frac{(\alpha + 1)\, a^{\alpha + 1}\, b^{\beta}}{(\alpha + 1)'\ \beta'}$$

$$\alpha + \beta = m$$

oder, welches nach [§. 36. 2.) Zus.] einerlei ist, dem combin. Integrale

$$\int \frac{a^{\alpha + 1}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha + \beta = m$$

Es ist demnach

$$\int \frac{\alpha\, a^{\alpha}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{a^{\alpha + 1}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha + \beta = m + 1 \qquad \alpha + \beta = m$$

Gerade so wird bewiesen, dafs

$$\int \frac{\beta\, a^{\alpha}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{a^{\alpha}\, b^{\beta+1}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta = m+1 \qquad \alpha+\beta = m$$

seyn müsse. Addirt man diese beiden Gleichungen zusammen, so erhält man nach dem *ersten* Lehrsatze in §. 3.

$$\int \frac{(\alpha+\beta)\, a^{\alpha}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{(a+b)\, a^{\alpha}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta = m+1 \qquad \alpha+\beta = m$$

Wirft man die unveränderlichen Factoren nach dem *andern* Lehrsatze eben daselbst heraus, so erhält man, weil bei dem Integrale auf der linken Seite nach der Bedingungsgleichung $\alpha+\beta = m+1$ ist

$$(m+1) \cdot \int \frac{a^{\alpha}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = (a+b) \cdot \int \frac{a^{\alpha}\, b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta = m+1 \qquad \alpha+\beta = m$$

So wie hier das Integral rechts von m abhängt, eben so hängt das links befindliche von $m+1$ ab. Man kann daher diese Gleichung auch so ausdrücken:

$$(\odot) \quad (m+1)\ \Sigma\ (m+1) = (a+b)\ \Sigma\ (m)$$

Setzt man hier statt m nach der Reihe 0, 1, 2, 3 u. s. w. bis $n-1$, so erhält man

$$\begin{aligned}
1\ \Sigma(1) &= (a+b)\ \Sigma(0)\\
2\ \Sigma(2) &= (a+b)\ \Sigma(1)\\
3\ \Sigma(3) &= (a+b)\ \Sigma(2)\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
n\ \Sigma(n) &= (a+b)\ \Sigma(n-1)
\end{aligned}$$

woraus sich sogleich ergiebt

$$n'\ \Sigma(n) = (a+b)^n\ \Sigma\ (0)$$

Nun ist offenbar $\Sigma\,(o) = 1$, folglich $\Sigma\,(n) = \frac{(a+b)^n}{n'}$, oder

$$1)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^\alpha b^\beta}{\alpha'\ \beta'} = \frac{(a+b)^n}{n'}$$

oder, wenn man mit n' multiplicirt, nach §. 3. 2. Lehrs.

$$2)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{(\alpha+\beta)'}{\alpha'\ \beta'}\, a^\alpha b^\beta = (a+b)^n$$

daferne n Null, oder eine ganze positive Zahl ist.

Die Formel 2) enthält den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten, und zwar in der Form, wie er gewöhnlich dargestellt wird.

Von der Formel (⊙) an hätte man die Schlüsse auch durch combinatorische Integrale, nehmlich so darstellen können.

Nach gedachter Formel ist

$$(\delta+1)\ \Sigma\ (\delta+1) = (a+b)\ \Sigma\ (\delta)$$

oder, wenn man mit $\delta'\,(a+b)^\gamma$ beiderseits multiplicirt, nach §. 36. 2.) Zus.

$$(\delta+1)'\,(a+b)^\gamma\ \Sigma\ (\delta+1) = \delta'\,(a+)^{\gamma\mp 1}\ \Sigma\,(\delta)$$

folglich, wenn man die Bedingungsgleichung $\gamma+\delta = n-1$ hinzufügt,

$$\int^{\gamma+\delta=n-1} (\delta+1)'\,(a+b)^\gamma\ \Sigma\ (\delta+1) = \int^{\gamma+\delta=n-1} \delta'\,(a+b)^{\gamma+1}\ \Sigma\ (\delta)$$

Setzt man in dem combinatorischen Integrale

$$\int^{\gamma+\delta=n} \delta'\,(a+b)^\gamma\ \Sigma\ (\delta)$$

$\delta+1$ statt δ, so erhält man das *links* in voriger Gleichung befindliche Integral. Setzt man hingegen in dem nehmlichen Integrale $\gamma+1$ statt γ, so erhält man das *rechts* in voriger Gleichung befindliche.

Subtrahirt man also vorige Gleichung vom gedachtem combinatorischen Integrale, so erhält man nach §. 26.

$$\int_{\gamma=n} \overline{(a+b)^{\gamma}} = \int_{\delta=n} \overline{\delta^{l}\ \Sigma\ (\delta)}$$

oder

$$(a+b)^{n} = n^{l}\ \Sigma\ (n)$$

wie vorhin.

Selbst aber auch ohne Gebrauch des Σ könnte man alle Schlüsse concentrirt so darstellen. Nach §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 2.) Zus. ist

$$\int_{\alpha^{l}\ \beta^{l}} \overline{\alpha\ \delta^{ll}\ (a+b)^{\gamma}\ a^{\alpha}\ b^{\beta}} = \int_{\alpha^{l}\ \beta^{l}} \overline{\delta^{ll}\ (a+b)^{\gamma}\ a^{\alpha+1}\ b^{\beta}}$$
$$\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1 \qquad \alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1$$

$$\int_{\alpha^{l}\ \beta^{l}} \overline{\beta\ \delta^{ll}\ (a+b)^{\gamma}\ a^{\alpha}\ b^{\beta}} = \int_{\alpha^{l}\ \beta^{l}} \overline{\delta^{ll}\ (a+b)^{\gamma}\ a^{\alpha}\ b^{\beta+1}}$$
$$\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1 \qquad \alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1$$

also, wenn man diese Gleichungen addirt, nach §. 3. 1. Lehrs. u. §. 36. 2.) Zus.

$$\int_{\alpha^{l}\ \beta^{l}} \overline{(\delta+1)^{l}\ (a+b)^{\gamma}\ a^{\alpha}\ b^{\beta}} = \int_{\alpha^{l}\ \beta^{l}} \overline{\delta^{l}\ (a+b)^{\gamma+1}\ a^{\alpha}\ b^{\beta}}$$
$$\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1 \qquad \alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1$$

Setzt man nun in dem combinatorischen Integrale

$$\int_{\alpha^{l}\ \beta^{l}} \overline{\delta^{l}\ (a+b)^{\gamma}\ a^{\alpha}\ b^{\beta}}$$
$$\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n$$

$\delta+1$ statt δ, so bekommt man das *links* in voriger Gleichung befindliche Integral. Setzt man hingegen in dem nehmlichen Integrale $\gamma+1$ statt γ, so erhält man das *rechts* in voriger Gleichung befindliche.

Subtrahirt man also vorige Gleichung von diesem combinatorischen Integrale, so erhält man nach §. 26.

$$\int \frac{(a+b)^{\gamma}\ a^{\alpha}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{\delta'\ a^{\alpha}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=0,\ \gamma=n \qquad \alpha+\beta=\delta,\ \delta=n$$

oder, welches nach §. 15. einerlei ist

$$(a+b)^n = \int \frac{(\alpha+\beta)'}{\alpha'\ \beta'}\ a^{\alpha}\ b^{\beta}$$

$$\alpha+\beta=n$$

welches die Formel 2) war.

1.) *Zusatz.* Nach §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 2.) Zus. ist

$$\int \frac{\alpha\ a^{\alpha}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{a^{\alpha+1}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=n+1 \qquad \alpha+\beta=n$$

und nach dem 2. Lehrsatze in §. 3.

$$\int \frac{a^{\alpha+1}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = a \cdot \int \frac{a^{\alpha}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = a \cdot \frac{(a+b)^n}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n \qquad \alpha+\beta=n$$

also auch

$$\int \frac{\alpha\ a^{\alpha}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = a \cdot \frac{(a+b)^n}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n+1$$

2.) *Zusatz.* Im Falle $a+b$ nicht Null ist, ist auch

$$\int \frac{\alpha\ a^{\alpha}\ b^{\beta}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{n\,a}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^n}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

Denn dafs diese Gleichung richtig ist, wenn n eine ganze positive Zahl ist, erhellet aus vorigem Zusatze, und wenn $n=0$ ist, sind beide Glieder derselben ebenfalls $=0$.

3.) *Zusatz.* Das combinatorische Integral

$$\int_{\alpha+\beta=n} \frac{\alpha\,(-1)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'}$$

ist Null für $n = 0, 2, 3, 4$ u. s. w. und 1 für $n = 1$. Man kann daher setzen

$$\int_{\alpha+\beta=n} \frac{\alpha\,(-1)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'} = n \cdot 0_{n-1}$$

und allgemeiner, wenn man mit a^n multiplicirt

$$\int_{\alpha+\beta=n} \frac{\alpha\; a^{\alpha}\,(-a)^{\beta}}{\alpha'\;\beta'} = n \cdot 0_{n-1}\, a^n$$

4.) *Zusatz.* Nach §. 19. hat man aus 1)

$$\int_{\alpha+2\beta=n} \frac{a^{\alpha}\,b^{2\beta}}{\alpha'\,(2\beta)'} + \int_{\alpha+2\beta=n-1} \frac{a^{\alpha}\,b^{2\beta+1}}{\alpha'\,(2\beta+1)'} = \frac{(a+b)^n}{n'}$$

und wenn man hier $-b$ statt b setzt

$$\int_{\alpha+2\beta=n} \frac{a^{\alpha}\,b^{2\beta}}{\alpha'\,(2\beta)'} - \int_{\alpha+2\beta=n-1} \frac{a^{\alpha}\,b^{2\beta+1}}{\alpha'\,(2\beta+1)'} = \frac{(a-b)^n}{n'}$$

Es ist daher

$$1)\quad \int_{\alpha+2\beta=n} \frac{a^{\alpha}\,b^{2\beta}}{\alpha'\,(2\beta)'} = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2\,n'}$$

$$2)\quad \int_{\alpha+2\beta=n\;1} \frac{a^{\alpha}\,b^{2\beta+1}}{\alpha'\,(2\beta+1)'} = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2\,n'}$$

5.) *Zusatz.* Setzt man in den Formeln des vorigen Zusatzes statt n erst 2n, dann 2n + 1, so erhält man

$$\int^{\alpha+2\beta=2n} \frac{a^{\alpha} b^{2\beta}}{\alpha' (2\beta)'} = \frac{(a+b)^{2n} + (a-b)^{2n}}{2\,(2n)'}$$

$$\int^{\alpha+2\beta=2n+1} \frac{a^{\alpha} b^{2\beta}}{\alpha' (2\beta)'} = \frac{(a+b)^{2n+1} + (a-b)^{2n+1}}{2\,(2n+1)'}$$

$$\int^{\alpha+2\beta=2n-1} \frac{a^{\alpha} b^{2\beta+1}}{\alpha' (2\beta+1)'} = \frac{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}{2\,(2n)'}$$

$$\int^{\alpha+2\beta=2n} \frac{a^{\alpha} b^{2\beta+1}}{\alpha' (2\beta+1)'} = \frac{(a+b)^{2n+1} - (a-b)^{2n+1}}{2\,(2n+1)'}$$

Nach der Bedingungsgleichung des combinatorischen Integrals in der ersten und vierten von diesen Gleichungen muſs α darinnen *gerade*, aus gleichem Grunde aber in der zweiten und dritten Gleichung *ungerade* seyn. Man kann also (nach §. 19. Zus.) in den beiden ersten 2α und in den beiden andern $2\alpha + 1$ statt α setzen, und so erhält man

1) $$\int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^{2\alpha} b^{2\beta}}{(2\alpha)' (2\beta)'} = \frac{(a+b)^{2n} + (a-b)^{2n}}{2\,(2n)'}$$

2) $$\int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^{2\alpha+1} b^{2\beta}}{(2\alpha+1)' (2\beta)'} = \frac{(a+b)^{2n+1} + (a-b)^{2n+1}}{2\,(2n+1)'}$$

$$3)\quad \int^{\alpha+\beta=n-1} \frac{a^{2\alpha+1}\,b^{2\beta+1}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta+1)'} = \frac{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}{2\,(2n)'}$$

$$4)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^{2\alpha}\,b^{2\beta+1}}{(2\alpha)'\,(2\beta+1)'} = \frac{(a+b)^{2n+1} - (a-b)^{2n+1}}{2\,(2n+1)'}$$

Verwechselt man in diesen Formeln die Buchstaben a und b, und in den combinatorischen Integralen zugleich α und β, so geht von den Formeln 1) und 3) jede in sich selbst, von den Formeln 2) und 4) aber jede in die andere über.

§. 39.

Bestimmung der Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Winkels, durch Sinus und Cosinus des einfachen Winkels.

Diese, übrigens sehr bekannten Formeln stelle ich in der nehmlichen Absicht hier auf, wie in vorigem §. den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Man kann diese Formeln auf verschiedenen Wegen erhalten.

Der erste Weg durch Hülfe imaginärer Gröfsen ist folgender. Man bezeichne die besonders häufig vorkommende imaginäre Gröfse $\sqrt{-1}$ durch i, so ist $i^2 = -1$. Hieraus folgt leicht, wenn z und y zwei Winkel bedeuten $(\cos z + i \sin z) . (\cos y + i \sin y) = \cos z . \cos y + i \cos z . \sin y + i \sin z . \cos y + i^2 \sin z . \sin y = \cos z . \cos y - \sin z . \sin y + i (\cos z . \sin y + \sin z . \cos y)$, oder

$$(\cos z + i \sin z) . (\cos y + i \sin y) = \cos (z+y) + i \sin (z+y)$$

und, wenn man hier $-z$, $-y$ statt z, y setzt,

$$(\cos z - i \sin z) . (\cos y - i \sin y) = \cos (z+y) - i \sin (z+y)$$

Was hier von zwei Winkeln z und y erwiesen worden ist, läfst sich

durch wiederholte Anwendung desselben Satzes auch von drei, vier und jeder Anzahl Winkel erweisen.

Es folgt daher, wenn man alle diese Winkel gleich setzt, sehr leicht, dafs

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos . nz + i \sin . nz$$
$$(\cos z - i \sin z)^n = \cos . nz - i \sin . nz$$

seyn müsse, daferne n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet.

Setzt man nun $a = \cos z$, $b = i \sin z$, so ist

$$a + b = \cos z + i \sin z, \quad a - b = \cos z - i \sin z$$

also, wie eben gezeigt worden

$$(a + b)^n = \cos . nz + i \sin . nz, \quad (a - b)^n = \cos . nz - i \sin . nz$$

mithin

$$(a + b)^n + (a - b)^n = 2 \cos . nz, \quad (a + b)^n - (a - b)^n = 2 i \sin . nz,$$

Nach dieser Substitution verwandeln sich nun die beiden Formeln des 4.) Zus. zu vorigem §. in folgende

$$1) \int \frac{(-1)^{\beta} \cos^{\alpha} z . \sin^{2\beta} z}{\alpha' (2\beta)'} = \frac{\cos . nz}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

und

$$\int \frac{(-1)^{\beta} i \cos^{\alpha} z . \sin^{2\beta+1} z}{\alpha' (2\beta+1)'} = \frac{i \sin . nz}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n - 1$$

oder durch i dividirt

$$2) \int \frac{(-1)^{\beta} \cos^{\alpha} z . \sin^{2\beta+1} z}{\alpha' (2\beta+1)'} = \frac{\sin . nz}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n - 1$$

Multiplicirt man diese beide Formeln mit n', so erhält man

$$3)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}(\alpha+2\beta)'}{\alpha'(2\beta)'}\cdot\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta}z \;=\; \cos.nz$$
$$\alpha+2\beta=n$$

$$4)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}(\alpha+2\beta+1)'}{\alpha'(2\beta+1)'}\cdot\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta+1}z \;=\; \sin.nz$$
$$\alpha+2\beta=n-1$$

Eine andere Art diese Formeln zu erweisen, und zwar ohne Zuziehung unmöglicher Gröfsen, ist folgende.

Man setze der Kürze wegen

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta}z}{\alpha'(2\beta)'} = \Sigma(m),\qquad \int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta+1}z}{\alpha'(2\beta+1)'} = S(m)$$
$$\alpha+2\beta=m \qquad\qquad \alpha+2\beta=m-1$$

so ist nach §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 2.) Zus.

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\alpha\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta}z}{\alpha'(2\beta)'} = \int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha+1}z\cdot\sin^{2\beta}z}{\alpha'(2\beta)'}$$
$$\alpha+2\beta=m+1 \qquad\qquad \alpha+2\beta=m$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta}2\beta\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta}z}{\alpha'(2\beta)'} = -\int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta+2}z}{\alpha'(2\beta+1)'}$$
$$\alpha+2\beta=m+1 \qquad\qquad \alpha+2\beta=m-1$$

also, wenn man addirt, nach §. 3.

$$(m+1)\int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta}z}{\alpha'(2\beta)'} =$$
$$\alpha+2\beta=m+1$$

$$\cos z.\int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta}z}{\alpha'(2\beta)'} - \sin z.\int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha}z\cdot\sin^{2\beta+1}z}{\alpha'(2\beta+1)'}$$
$$\alpha+2\beta=m \qquad\qquad \alpha+2\beta=m-1$$

oder

$$(\odot)\ (m+1)\ \Sigma\ (m+1) = \cos z\ .\ \Sigma\ (m) - \sin z\ .\ S\ (m)$$

Eben so ist

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\,\alpha\,\cos^{\alpha} z\,.\,\sin^{2\beta+1} z}{\alpha'\,(2\beta+1)'} = \int \frac{(-1)^{\beta}\,\cos^{\alpha+1} z\,.\,\sin^{2\beta+1} z}{\alpha'\,(2\beta+1)'}$$

$\alpha + 2\beta = m$ $\qquad$ $\alpha + 2\beta = m-1$

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\,(2\beta+1)\,\cos^{\alpha} z\,.\,\sin^{2\beta+1} z}{\alpha'\,(2\beta+1)'} = \int \frac{(-1)^{\beta}\,\cos^{\alpha} z\,.\,\sin^{2\beta+1} z}{\alpha'\,(2\beta)'}$$

$\alpha + 2\beta = m$ $\qquad$ $\alpha + 2\beta = m$

also, wenn man addirt, nach eben den Sätzen,

$$(m+1) \int \frac{(-1)^{\beta}\,\cos^{\alpha} z\,.\,\sin^{2\beta+1} z}{\alpha'\,(2\beta+1)'} =$$

$\alpha + 2\beta = m$

$$\sin z\,.\int \frac{(-1)^{\beta}\,\cos^{\alpha} z\,.\,\sin^{2\beta} z}{\alpha'\,(2\beta)'} + \cos z\,.\int \frac{(-1)^{\beta}\,\cos^{\alpha} z\,.\,\sin^{2\beta+1} z}{\alpha'\,(2\beta+1)'}$$

$\alpha + 2\beta = m$ $\qquad$ $\alpha + 2\beta = m-1$

oder

$$(\heartsuit)\ (m+1)\ S\ (m+1) = \sin z\,.\,\Sigma\ (m) + \cos z\ .\ S\ (m)$$

Sind nun die beiden Formeln

$$\Sigma\ (n) = \frac{\cos .\ nz}{n'} \qquad S\ (n) = \frac{\sin .\ nz}{n'}$$

für $n = m$ wahr, oder ist

$$\Sigma\ (m) = \frac{\cos .\ mz}{m'} \qquad S\ (m) = \frac{\sin .\ mz}{m'}$$

so ist nach $(\odot)$ und $(\heartsuit)$ und bekannten trigonometrischen Relationen

$$(m+1)\,\Sigma\ (m+1) = \frac{\cos z\,.\,\cos .\ mz}{m'} - \frac{\sin z\,.\,\sin .\ mz}{m'} = \frac{\cos .\ (m+1)\,z}{m'}$$

$$(m+1)\ S\ (m+1) = \frac{\sin z\,.\,\cos .\ mz}{m'} + \frac{\cos z\,.\,\sin .\ mz}{m'} = \frac{\sin .\ (m+1)\,z}{m'}$$

also ist auch nach §. 36. 2.) Zus.

$$\Sigma(m+1) = \frac{\cos.(m+1)z}{(m+1)'} \qquad S(m+1) = \frac{\sin.(m+1)z}{(m+1)'}$$

oder es sind die nehmlichen Formeln auch für $n = m+1$ wahr. Sie sind aber offenbar richtig für $n = 0$, und $n = 1$, also allgemein, wenn n Null oder jede ganze positive Zahl bedeutet.

Aber auch ohne Zuziehung des Schlusses von $n = m$ auf $n = m+1$, der sehr bekannt ist, und gegen den sich nichts einwenden läfst, kann man diese Formeln auf folgende dritte Art erweisen. Man multiplicire die Formel (⊙) mit sin. v und die Formel (☽) mit cos. v, wo v einen ganz willkührlichen Winkel bedeutet, und addire die Resultate, so erhält man nach den bekannten trigonometrischen Relationen

$$(m+1)\,[\sin v.\,\Sigma(m+1) + \cos v.\,S(m+1)] =$$
$$\sin(v+z).\,\Sigma(m) + \cos(v+z).\,S(m)$$

In dieser Formel setze man δ, $v+\gamma z$ statt m, v, multiplicire dann mit δ' und füge die Bedingungsgleichung $\gamma+\delta = n-1$ hinzu, so erhält man nach §. 36. 2.) Zus.

$$\int \overline{(\delta+1)'\,[\sin(v+\gamma z).\,\Sigma(\delta+1) + \cos(v+\gamma z).\,S(\delta+1)]} =$$
$$\gamma+\delta = n-1$$
$$\int \overline{\delta'\,[\sin(v+\gamma z+z).\,\Sigma(\delta) + \cos(v+\gamma z+z).\,S(\delta)]}$$
$$\gamma+\delta = n-1$$

Setzt man nun in dem combinatorischen Integrale

$$\int \overline{\delta'\,[\sin(v+\gamma z).\,\Sigma(\delta) + \cos(v+\gamma z).\,S(\delta)]}$$
$$\gamma+\delta = n$$

$\delta+1$ statt δ, so bekommt man das *links* in voriger Gleichung befindliche combinatorische Integral. Setzt man hingegen in dem nehmlichen combinatorischen Integrale $\gamma+1$ statt γ, so erhält man das *rechts* in voriger Gleichung befindliche.

Subtrahirt man also vorige Gleichung von gedachtem combinatorischen Integrale, so erhält man nach §. 26. da $\Sigma(0) = 1$ und $S(0) = 0$ ist,

$$\int_{\gamma=n} \overline{\sin(v+\gamma z)} = \int_{\delta=n} \overline{\delta'\,[\sin v.\,\Sigma(\delta) + \cos v.\,S(\delta)]}$$

oder, welches einerlei ist

$$\sin(v + n z) = n' [\sin v \,.\, \Sigma(n) + \cos v \,.\, S(n)]$$

mithin ist

$$\frac{\sin(v + n z)}{n'} = \sin v \,.\, \Sigma(n) + \cos v \,.\, S(n)$$

Setzt man nun hier statt v erst 90°, dann 0°, so erhält man

$$\frac{\cos . n z}{n'} = \Sigma(n) \qquad \frac{\sin . n z}{n'} = S(n)$$

welches die Formeln 1) und 2) waren.

Selbst aber auch ohne den Gebrauch des Σ und S könnte man alle Schlüsse so darstellen. Nach §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 2.) Zus. ist

$$\int \frac{(-1)^{\beta} \alpha \delta' \cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{2\beta} z \,.\, \sin(v + \gamma z)}{\alpha' (2\beta)'} =$$

$$\alpha + 2\beta = \delta + 1, \quad \gamma + \delta = n - 1$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta} \delta' \cos^{\alpha+1} z \,.\, \sin^{2\beta} z \,.\, \sin(v + \gamma z)}{\alpha' (2\beta)'}$$

$$\alpha + 2\beta = \delta, \quad \gamma + \delta = n - 1$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta} 2\beta \delta' \cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{2\beta} z \,.\, \sin(v + \gamma z)}{\alpha' (2\beta)'} =$$

$$\alpha + 2\beta = \delta + 1, \quad \gamma + \delta = n - 1$$

$$- \int \frac{(-1)^{\beta} \delta' \cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{2\beta+2} z \,.\, \sin(v + \gamma z)}{\alpha' (2\beta + 1)'}$$

$$\alpha + 2\beta = \delta - 1, \quad \gamma + \delta = n - 1$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta} \alpha \delta' \cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{2\beta+1} z \,.\, \cos(v + \gamma z)}{\alpha' (2\beta + 1)'} =$$

$$\alpha + 2\beta = \delta, \quad \gamma + \delta = n - 1$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta} \delta' \cos^{\alpha+1} z \,.\, \sin^{2\beta+1} z \,.\, \cos(v + \gamma z)}{\alpha' (2\beta + 1)'}$$

$$\alpha + 2\beta = \delta - 1, \quad \gamma + \delta = n - 1$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\,(2\beta+1)\,\delta^{\prime}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta+1}z\,.\cos(\nu+\gamma z)}{\alpha^{\prime}\,(2\beta+1)^{\prime}} =$$

$$\alpha+2\beta=\delta,\quad \gamma+\delta=n-1$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\,\delta^{\prime}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta+1}z\,.\cos(\nu+\gamma z)}{\alpha^{\prime}\,(2\beta)^{\prime}}$$

$$\alpha+2\beta=\delta,\quad \gamma+\delta=n-1$$

Addirt man diese Gleichungen (nach §. 3. 1.) Lehrs.), weswegen man *links* das erste und zweite, desgleichen aber auch das dritte und vierte Integral zusammen nehmen mufs, weil diese einerlei Bedingungsgleichungen haben, *rechts* aber aus gleichem Grunde das erste und vierte, desgleichen das zweite und dritte; so erhält man nach §. 36. 2.) Zus. und den bekannten trigonometrischen Relationen

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\,(\delta+1)^{\prime}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta}z\,.\sin(\nu+\gamma z)}{\alpha^{\prime}\,(2\beta)^{\prime}}$$

$$\alpha+2\beta=\delta+1,\quad \gamma+\delta=n-1$$

$$+\int \frac{(-1)^{\beta}\,(\delta+1)^{\prime}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta+1}z\,.\cos(\nu+\gamma z)}{\alpha^{\prime}\,(2\beta+1)^{\prime}}$$

$$\alpha+2\beta=\delta,\quad \gamma+\delta=n-1$$

$$=\int \frac{(-1)^{\beta}\,\delta^{\prime}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta}z\,.\sin(\nu+\gamma z+z)}{\alpha^{\prime}\,(2\beta)^{\prime}}$$

$$\alpha+2\beta=\delta,\quad \gamma+\delta=n-1$$

$$+\int \frac{(-1)^{\beta}\,\delta^{\prime}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta+1}z\,.\cos(\nu+\gamma z+z)}{\alpha^{\prime}\,(2\beta+1)^{\prime}}$$

$$\alpha+2\beta=\delta-1,\quad \gamma+\delta=n-1$$

Diese Gleichung von der Summe der beiden combinatorischen Integrale

$$+\int \frac{(-1)^{\beta}\,\delta^{l}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta+1}z\,.\cos(v+\gamma z)}{\alpha^{l}\,(2\beta+1)^{l}} \qquad (2$$

$$\alpha+2\beta=\delta-1,\quad \gamma+\delta=n$$

abgezogen, giebt nach §. 26. aus gleichem Grunde wie vorher

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta}z\,.\sin(v+\gamma z)}{\alpha^{l}\,(2\beta)^{l}} = \int \frac{(-1)^{\beta}\,\delta^{l}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta}z\,.\sin v}{\alpha^{l}\,(2\beta)^{l}}$$

$$\alpha+2\beta=0,\quad \gamma=n \qquad\qquad \alpha+2\beta=\delta,\quad \delta=n$$

$$+\int \frac{(-1)^{\beta}\,\delta^{l}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta+1}z\,.\cos v}{\alpha^{l}\,(2\beta+1)^{l}}$$

$$\alpha+2\beta=\delta-1,\quad \delta=n$$

oder, welches einerlei ist (§. 15.)

$$\sin(v+nz)=\int \frac{(-1)^{\beta}\,(\alpha+2\beta)^{l}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta}z\,.\sin v}{\alpha^{l}\,(2\beta)^{l}}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$+\int \frac{(-1)^{\beta}\,(\alpha+2\beta+1)^{l}\cos^{\alpha}z\,.\sin^{2\beta+1}z\,.\cos v}{\alpha^{l}\,(2\beta+1)^{l}}$$

$$\alpha+2\beta=n-1$$

Setzt man hier statt v erst 90°, dann 0°, so bekommt man die Formeln 3) und 4), aus denen sich nun wieder leicht 1) und 2) ergeben.

Zusatz. Unterscheidet man in den Formeln 1) und 2) gerade und ungerade Werthe von n, so erhält man aus eben den Gründen, wie in §. 38. 5.) Zus. die vier Formeln

$$1)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{2\alpha}z\,.\,\sin^{2\beta}z}{(2\alpha)'\,(2\beta)'} \;\underset{\alpha+\beta=n}{=}\; \frac{\cos.2nz}{(2n)'}$$

$$2)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{2\alpha+1}z\,.\,\sin^{2\beta}z}{(2\alpha+1)'\,(2\beta)'} \;\underset{\alpha+\beta=n}{=}\; \frac{\cos.(2n+1)z}{(2n+1)'}$$

$$3)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{2\alpha+1}z\,.\,\sin^{2\beta+1}z}{(2\alpha+1)'\,(2\beta+1)'} \;\underset{\alpha+\beta=n-1}{=}\; \frac{\sin.2nz}{(2n)'}$$

$$4)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}\cos^{2\alpha}z\,.\,\sin^{2\beta+1}z}{(2\alpha)'\,(2\beta+1)'} \;\underset{\alpha+\beta=n}{=}\; \frac{\sin.(2n+1)z}{(2n+1)'}$$

§. 40.

Bestimmung der Potenzen von Cosinus und Sinus eines Winkels durch Cosinus und Sinus der Vielfachen dieses Winkels nebst verwandten Sätzen.

Diese, übrigens ebenfalls bekannten Formeln, kann man erstens durch Zuziehung der imaginären Gröfse i auf folgende Art *finden*. Man setze

$$a = \cos z + i\sin z, \quad b = \cos z - i\sin z$$

so ist, wie im vorigen §. gezeigt wurde

$$a^{\alpha} = \cos.\alpha z + i\sin.\alpha z, \quad b^{\beta} = \cos.\beta z - i\sin.\beta z$$

also

$$a^{\alpha}b^{\beta} = \cos.(\alpha-\beta)z + i\sin.(\alpha-\beta)z$$

Substituirt man dies in der Formel 1) des §. 38, so erhält man nach §. 3.

$$\int \frac{\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} + i\int \frac{\sin.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} \;\underset{\alpha+\beta=n}{=}\; \frac{2^n\cos^n z}{n'}$$

Was die imaginäre Gröfse als Factor enthält, mufs für sich o seyn, man hat also die beiden Formeln

$$1)\ \int^{\alpha+\beta=n} \frac{\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} = \frac{2^n \cos^n z}{n'} \qquad 2)\ \int^{\alpha+\beta=n} \frac{\sin.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} = o$$

Ohne Zuziehung imaginärer Gröfsen lassen sich diese Formeln so erweisen. Nach §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 2.) Zus. ist

$$\int^{\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\alpha\,\delta'\,2^\gamma \cos^\gamma z.\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} = \int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\delta'\,2^\gamma \cos^\gamma z.\cos.(\alpha+1-\beta)z}{\alpha'\,\beta'}$$

$$\int^{\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\beta\,\delta'\,2^\gamma \cos^\gamma z.\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} = \int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\delta'\,2^\gamma \cos^\gamma z.\cos.(\alpha-1-\beta)z}{\alpha'\,\beta'}$$

also, wenn man nach §. 3. addirt, mit Zuziehung von §. 36. 2.) Zus. und bekannten trigonometrischen Relationen

$$\int^{\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{(\delta+1)'\,2^\gamma \cos^\gamma z.\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} = \int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\delta'\,2^{\gamma+1}\cos^{\gamma+1}z.\cos(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'}$$

Je nachdem man nun in dem combinatorischen Integrale

$$\int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n} \frac{\delta'\,2^\gamma \cos^\gamma z.\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'}$$

$\delta+1$ statt δ oder $\gamma+1$ statt γ setzt, je nachdem erhält man die Gröfsen links und rechts in voriger Gleichung. Man hat also nach §. 26. aus den nehmlichen Gründen, wie in den vorigen Paragraphen

$$\int^{\alpha+\beta=o,\ \gamma=n} \frac{2^\gamma \cos^\gamma z.\cos\ (\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'} = \int^{\alpha+\beta=\delta,\ \delta=n} \frac{\delta'\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha'\,\beta'}$$

oder, welches einerlei ist (§ 15.)

$$2^n \cos^n z = \int \frac{(\alpha+\beta)^l \cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha^l \beta^l}$$
$$\alpha+\beta=n$$

und diese Formel durch n^l dividirt giebt die Formel 1).

Die Formel 2) läfst sich noch leichter, nehmlich so erweisen. Die beiden combinatorischen Integrale

$$\int \frac{\sin.(\alpha-\beta)z}{\alpha^l \beta^l} \qquad \int \frac{\sin.(\beta-\alpha)z}{\alpha^l \beta^l}$$
$$\alpha+\beta=n \qquad \alpha+\beta=n$$

sind einander nach §. 2. 2.) Zus. *gleich*, weil eins aus dem andern durch Verwechslung der beiden Buchstaben α und β entsteht. Sie sind aber auch *entgegengesetzt*, weil die allgemeinen Glieder es sind, und sie einerlei Bedingungsgleichung haben. Folglich ist jedes $= 0$.

Entwickelt man die Formel 1), welche für gegenwärtigen Zweck eine Hauptformel ist, für einzelne Werthe von n, so findet es sich, dafs diejenigen Glieder, die von Anfange und Ende gleich weit abstehen, einander gleich sind. Derowegen läfst sich die Anzahl der Glieder um die Hälfte verkürzen. Dies kann man aber auch durch combinatorische Integrale bewirken. Nach §. 30. hat man nehmlich

$$\int \frac{\cos.(\alpha-\beta)z}{\alpha^l \beta^l} = \int \frac{\cos\ \alpha z}{(\alpha+\beta)^l \beta^l} + \int \frac{\cos\ (-\beta-1)z}{\alpha^l (\alpha+\beta+1)^l}$$
$$\alpha+\beta=n \qquad \alpha+2\beta=n \qquad 2\alpha+\beta=n-1$$

nach §. 26.

$$\int \frac{\cos\ \alpha z}{(\alpha+\beta)^l \beta^l} = \int \frac{\cos.(\alpha+1)z}{(\alpha+\beta+1)^l \beta^l} + \int \frac{1}{\beta^l \beta^l}$$
$$\alpha+2\beta=n \qquad \alpha+2\beta=n-1 \qquad 2\beta=n$$

und, weil entgegengesetzte Bogen einerlei Cosinus haben, und nach §. 2. 2.) Zus.

$$\int \frac{\overline{\cos.(-\beta-1)z}}{\alpha^l(\alpha+\beta+1)^l} = \int \frac{\overline{\cos.(\beta+1)z}}{\alpha^l(\alpha+\beta+1)^l} = \int \frac{\overline{\cos.(\alpha+1)z}}{\beta^l(\alpha+\beta+1)^l}$$
$$2\alpha+\beta=n-1 \qquad 2\alpha+\beta=n-1 \qquad \alpha+2\beta=n-1$$

Hieraus, und aus 1) hat man nun

$$3)\quad \frac{2^n\cos^n z}{n^l} = \int \frac{\overline{\cos.(\alpha+1)z}}{(\alpha+\beta+1)^l\beta^l} + \int \frac{\overline{1}}{\beta^l\ \beta^l}$$
$$\alpha+2\beta=n-1 \qquad 2\beta=n$$

Das letzte dieser beiden Integrale ist allemal o, wenn n ungerade ist.

Unterscheidet man gerade und ungerade Werthe von n in dieser Formel, so erhält man aus ähnlichen Gründen wie in [§. 38. 5.) Zus.]

$$4)\quad \frac{2^{2n}\cos^{2n}z}{(2n)^l} = \int \frac{\overline{2\cos.(2\alpha+2)z}}{(2\alpha+\beta+2)^l\beta^l} + \frac{1}{n^l\ n^l}$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

$$5)\quad \frac{2^{2n+1}\cos^{2n+1}z}{(2n+1)^l} = \int \frac{\overline{2\cos.(2\alpha+1)z}}{(2\alpha+\beta+1)^l\beta^l}$$
$$\alpha+\beta=n$$

Man setze hier 90° - z statt z, so hat man $(2\alpha+2).(90°-z) = (2\alpha+2).90° - (2\alpha+2).z = (\alpha+1).180° - (2\alpha+2).z$ statt $(2\alpha+2).z$, also $(-1)^{\alpha+1}\cos.(2\alpha+2).z$ statt $\cos.(2\alpha+2).z$, hingegen $(2\alpha+1).(90°-z) = (2\alpha+1).90° - (2\alpha+1).z = \alpha.180°+90° - (2\alpha+1).z$ statt $(2\alpha+1).z$, also $(-1)^{\alpha}\cos(90° - (2\alpha+1).z) = (-1)^{\alpha}\sin.(2\alpha+1).z$ statt $\cos.(2\alpha+1).z$ zu setzen. Man erhält so die beiden Formeln:

$$6)\quad \frac{2^{2n}\sin^{2n}z}{(2n)^l} = \frac{1}{n^l\ n^l} - \int \frac{\overline{(-1)^{\alpha}2\cos.(2\alpha+2).z}}{(2\alpha+\beta+2)^l\beta^l}$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

$$7)\quad \frac{2^{2n+1}\sin^{2n+1}z}{(2n+1)^l} = \int \frac{\overline{(-1)^{\alpha}2.\sin(2\alpha+1).z}}{(2\alpha+\beta+1)^l\beta^l}$$
$$\alpha+\beta=n$$

1.) *Zusatz.* Multiplicirt man die Formel 1) mit sin v, die Formel 2) mit cos v, und addirt die Resultate, so erhält man

$$\int \frac{\overline{\sin(v + \alpha z - \beta z)}}{\alpha' \; \beta'} = \frac{2^n \cos^n z \,.\, \sin v}{n'}$$
$$\alpha + \beta = n$$

3.) *Zusatz.* Setzt man hier $x + \frac{1}{2} n (y + z)$, $\frac{1}{2}(y - z)$ statt v und z, so erhält man

$$1) \int \frac{\overline{\sin(x + \alpha y + \beta z)}}{\alpha' \; \beta'} = \frac{2^n \cos^n \frac{1}{2}(y - z) \,.\, \sin(x + \frac{1}{2} n (y + z))}{n'}$$
$$\alpha + \beta = n$$

und wenn man hier statt x erst 90°, dann 0° setzt

$$2) \int \frac{\overline{\cos(\alpha y + \beta z)}}{\alpha' \; \beta'} = \frac{2^n \cos^n \frac{1}{2}(y - z) \,.\, \cos \frac{1}{2} n (y + z)}{n'}$$
$$\alpha + \beta = n$$

$$3) \int \frac{\overline{\sin(\alpha y + \beta z)}}{\alpha' \; \beta'} = \frac{2^n \cos^n \frac{1}{2}(y - z) \,.\, \sin \frac{1}{2} n (y + z)}{n'}$$
$$\alpha + \beta = n$$

Diese Formeln sind minder bekannt. So wie übrigens hier die Formeln 2) und 3) als specielle Fälle aus 1) abgeleitet wurden, eben so kann man umgekehrt die Formel 1) aus 2) und 3) zusammensetzen. Man kann auch die Formel 1) aus 3) dadurch ableiten, dafs man in letzterer $y + \frac{1}{n} x$, $z + \frac{1}{n} x$ statt y und z setzt. Für $n = 0$ ist zwar diese Substitution unzuläfsig, aber für diesen Fall bedarf auch die Formel 1) gar keines Beweises.

3.) *Zusatz.* Setzt man in den Formeln 1) und 2) des §. selbst erst $n + 1$ statt n, differentiirt sie dann, und dividirt man die Resultate durch $-\mathrm{d}z$, so erhält man

$$1) \int \frac{\overline{(\alpha - \beta)\sin(\alpha - \beta)z}}{\alpha' \; \beta'} = \frac{2^{n+1} \cos^n z \,.\, \sin z}{n'} \qquad 2) \int \frac{\overline{(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \beta) z}}{\alpha' \; \beta'} = 0$$
$$\alpha + \beta = n + 1 \qquad\qquad \alpha + \beta = n + 1$$

Aber auch ohne Differentialrechnung kann man diese Formeln so erweisen. Es ist

$$\int \frac{\alpha \sin(\alpha-\beta)z}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{\sin(\alpha+1-\beta)z}{\alpha'\ \beta'}$$
$$\alpha+\beta=n+1 \qquad \alpha+\beta=n$$

$$\int \frac{\beta \sin(\alpha-\beta)z}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{\sin(\alpha-1-\beta)z}{\alpha'\ \beta'}$$
$$\alpha+\beta=n+1 \qquad \alpha+\beta=n$$

also, wenn man subtrahirt, nach bekannten Relationen und der Formel 1) des §.

$$\int \frac{(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)z}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{2\sin z.\cos(\alpha-\beta)z}{\alpha'\ \beta'} = \frac{2^{n+1}\cos^n z.\sin z}{n'}$$
$$\alpha+\beta=n+1 \qquad \alpha+\beta=n$$

welches die Gleichung 1) war.

Die combinatorischen Integrale

$$\int \frac{(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)z}{\alpha'\ \beta'} \qquad \int \frac{(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)z}{\alpha'\ \beta'}$$
$$\alpha+\beta=n+1 \qquad \alpha+\beta=n+1$$

sind einander nach [§. 2. 2.) Zus.] gleich, aber auch entgegengesetzt, folglich ist jedes $=0$, und also auch die Gleichung 2) bewiesen.

Aus der Gleichung 1) folgt eben so wie im §. selbst

3) $$\int \frac{(\alpha+1)\sin(\alpha+1)z}{(\alpha+\beta+1)'\ \beta'} = \frac{2^n\cos^n z\ .\ \sin z}{n'}$$
$$\alpha+2\beta=n$$

4) $$\int \frac{(2\alpha+1)\sin(2\alpha+1)z}{(2\alpha+\beta+1)'\ \beta'} = \frac{2^{2n}\cos^{2n}z\ .\ \sin z}{(2n)'}$$
$$\alpha+\beta=n$$

5) $$\int \frac{(2\alpha+2)\sin.(2\alpha+2)z}{(2\alpha+\beta+2)'\ \beta'} = \frac{2^{2n+1}\cos^{2n+1}z\ .\ \sin z}{(2n+1)'}$$
$$\alpha+\beta=n$$

$$6)\quad \int \frac{(-1)^{\alpha}(2\alpha+1)\cos(2\alpha+1)z}{(2\alpha+\beta+1)^{l}\beta^{l}} = \frac{2^{2n}\sin^{2n}z\,.\cos z}{(2n)^{l}}$$
$$\alpha+\beta=n$$

$$7)\quad \int \frac{(-1)^{\alpha}(2\alpha+2)\sin(2\alpha+2)z}{(2\alpha+\beta+2)^{l}\beta^{l}} = \frac{2^{2n+1}\sin^{2n+1}z\,.\cos z}{(2n+1)^{l}}$$
$$\alpha+\beta=n$$

4.) *Zusatz.* Multiplicirt man die Formeln 1) und 2) des vorigen Zusatzes mit cos v und sin v, und addirt die Resultate, so erhält man

$$\int \frac{(\alpha-\beta)\sin(v+\alpha z-\beta z)}{\alpha^{l}\beta^{l}} = \frac{2^{n+1}\cos^{n}z\,.\sin z\,.\cos v}{n^{l}}$$
$$\alpha+\beta=n+1$$

5.) *Zusatz.* Setzt man hier $x+\frac{1}{2}(n+1)(y+z)$, $\frac{1}{2}(y-z)$ statt v und z so erhält man

$$1)\quad \int \frac{(\alpha-\beta)\sin(x+\alpha y+\beta z)}{\alpha^{l}\beta^{l}} =$$
$$\alpha+\beta=n+1$$
$$\frac{2^{n+1}\cos^{n}\frac{1}{2}(y-z)\sin\frac{1}{2}(y-z)\cos\left[x+\frac{1}{2}(n+1)(y+z)\right]}{n^{l}}$$

und, wenn man hier statt x erst 90° dann 0° setzt

$$2)\quad \int \frac{(\alpha-\beta)\cos(\alpha y+\beta z)}{\alpha^{l}\beta^{l}} =$$
$$\alpha+\beta=n+1$$
$$\frac{2^{n+1}\cos^{n}\frac{1}{2}(z-y)\sin\frac{1}{2}(z-y)\sin\frac{1}{2}(n+1)(y+z)}{n^{l}}$$

$$3)\quad \int \frac{(\alpha-\beta)\sin(\alpha y+\beta z)}{\alpha^{l}\beta^{l}} =$$
$$\alpha+\beta=n+1$$
$$\frac{2^{n+1}\cos^{n}\frac{1}{2}(y-z)\sin\frac{1}{2}(y-z)\cos\frac{1}{2}(n+1)(y+z)}{n^{l}}$$

§. 41.

Noch andere merkwürdige Formeln mit trigonometrischen Linien.

Nach §. 26. 1.) Zus. ist

$$\int^{\alpha\,\delta'} \frac{\sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin^{\gamma}(x+y) \,.\, \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta = \delta+1, \qquad \gamma+\delta = n-1$$

$$\int^{\delta'} \frac{\sin^{\alpha+1} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin^{\gamma}(x+y) \,.\, \sin(w+y+\alpha y-\beta x)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta = \delta, \qquad \gamma+\delta = n-1$$

$$\int^{\beta\,\delta'} \frac{\sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin^{\gamma}(x+y) \,.\, \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta = \delta+1, \qquad \gamma+\delta = n-1$$

$$\int^{\delta'} \frac{\sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta+1} y \,.\, \sin^{\gamma}(x+y) \,.\, \sin(w-x+\alpha y-\beta x)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta = \delta, \qquad \gamma+\delta = n-1$$

Nun ist nach bekannten trigonometrischen Relationen

$$\sin x \,.\, \sin(w+y+\alpha y-\beta x) + \sin y \,.\, \sin(w-x+\alpha y-\beta x) =$$
$$\sin(x+y) \,.\, \sin(w+\alpha y-\beta x)$$

Addirt man also die vorigen Gleichungen, so bekommt man

$$\int^{(\delta+1)'} \frac{\sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin^{\gamma}(x+y) \,.\, \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta = \delta+1, \qquad \gamma+\delta = n-1$$

$$\int^{\delta'} \frac{\sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin^{\gamma+1}(x+y) \,.\, \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta = \delta, \qquad \gamma+\delta = n-1$$

Je nachdem man nun in dem combinatorischen Integrale

$$\int \frac{\delta' \sin^{\alpha} x \cdot \sin^{\beta} y \cdot \sin^{\gamma}(x+y) \cdot \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta, \qquad \gamma+\delta=n$$

$\delta+1$ statt δ, oder $\gamma+1$ statt γ setzt, je nachdem erhält man die Grössen links und rechts in voriger Gleichung. Es ist daher, wie in den vorhergehenden Paragraphen, nach §. 26.

$$\int \frac{\sin^{\alpha} x \cdot \sin^{\beta} x \cdot \sin^{\gamma}(x+y) \cdot \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha' \beta'} =$$

$$\alpha+\beta=0, \qquad \gamma=n$$

$$\int \frac{\delta' \sin^{\alpha} x \cdot \sin^{\beta} y \cdot \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta, \qquad \delta=n$$

oder welches einerlei ist

$$\sin^{n}(x+y) \cdot \sin w = \int \frac{(\alpha+\beta)' \sin^{\alpha} x \cdot \sin^{\beta} y \cdot \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

oder durch n' dividirt

$$1) \quad \frac{\sin^{n}(x+y) \cdot \sin w}{n'} = \int \frac{\sin^{\alpha} x \cdot \sin^{\beta} y \cdot \sin(w+\alpha y-\beta x)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

und wenn man hier statt w erst 90°, dann 0° setzt,

$$2) \quad \frac{\sin^{n}(x+y)}{n'} = \int \frac{\sin^{\alpha} x \cdot \sin^{\beta} y \cdot \cos(\alpha y-\beta x)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$3) \quad 0 = \int \frac{\sin^{\alpha} x \cdot \sin^{\beta} y \cdot \sin(\alpha y-\beta x)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

1.) *Zusatz.* Setzt man in der so eben erwiesenen Formel 1)

statt	x,	y,	w
respective	v - x,	y - v,	w + n v

so erhält man

$$1)\quad \frac{\sin^n(y-x)\,.\,\sin(w+nv)}{n'} = \int \frac{\sin^\alpha(v-x)\,.\,\sin^\beta(y-v)\,.\,\sin(w+\alpha y+\beta x)}{\alpha'\ \beta'} \qquad \alpha+\beta=n$$

und wenn man hier statt w erst 90° dann 0° setzt

$$2)\quad \frac{\sin^n(y-x)\,.\,\cos nv}{n'} = \int \frac{\sin^\alpha(v-x)\,.\,\sin^\beta(y-v)\,.\,\cos(\alpha y+\beta x)}{\alpha'\ \beta'} \qquad \alpha+\beta=n$$

$$3)\quad \frac{\sin^n(y-x)\,.\,\sin nv}{n'} = \int \frac{\sin^\alpha(v-x)\,.\,\sin^\beta(y-v)\,.\,\sin(\alpha y+\beta x)}{\alpha'\ \beta'} \qquad \alpha+\beta=n$$

So erscheinen die Formeln 2) und 3) als besondere Fälle der Formel 1). Man kann aber auch die Formel 1) aus den Formeln 2) und 3) zusammensetzen. Man kann auch die Formel 1) aus 3) dadurch ableiten, daſs man in letzterer $y+\frac{1}{n}w$, $x+\frac{1}{n}w$, $v+\frac{1}{n}w$ statt y, x, v substituirt. Für $n=0$ ist zwar diese Substitution unzuläſsig, allein für diesen Fall bedarf auch die Formel 1) gar keines Beweises.

2.) *Zusatz.* Setzt man in den Formeln des vorigen Zusatzes $x=0$, so erhält man

$$1)\quad \frac{\sin^n y\,.\,\sin.\,(w+nv)}{n'} = \int \frac{\sin^\alpha v\,.\,\sin^\beta(y-v)\,.\,\sin(w+\alpha y)}{\alpha'\ \beta'} \qquad \alpha+\beta=n$$

$$2)\quad \frac{\sin^n y\,.\,\cos.\,nv}{n'} = \int \frac{\sin^\alpha v\,.\,\sin^\beta(y-v)\quad\cos\alpha y}{\alpha'\ \beta'} \qquad \alpha+\beta=n$$

$$3)\quad \frac{\sin^n y \,.\, \sin \,.\, n v}{n'} = \int \frac{\sin^{\alpha} v \,.\, \sin^{\beta} (y - v) \,.\, \sin \alpha y}{\alpha' \;\; \beta'} \qquad \alpha + \beta = n$$

3.) *Zusatz.* Setzt man in den Formeln 2), 3) des vorigen Zusatzes $y = 90°$, $v = z$, und verwechselt zugleich α und β, so erhält man

$$\frac{\cos \,.\, nz}{n'} = \int \frac{\cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{\beta} z \,.\, \cos \,.\, \beta\, 90°}{\alpha' \;\; \beta'} \qquad \alpha + \beta = n$$

$$\frac{\sin \,.\, nz}{n'} = \int \frac{\cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{\beta} z \,.\, \sin \,.\, \beta\, 90°}{\alpha' \;\; \beta'} \qquad \alpha + \beta = n$$

Bei dem combinatorischen Integrale in der *ersten* Formel aber verschwindet das allgemeine Glied, wenn β *ungerade*, in der *andern* hingegen, wenn β *gerade* ist. Man kann daher nach §. 19. Zusatz, in der ersten Formel 2β in der andern $2\beta + 1$ statt β setzen, und erhält so, weil $(-1)^{\beta} = \cos \,.\, 2\beta\, 90° = \sin \,.\, (2\beta + 1)\, 90°$ ist, die beiden Formeln

$$\frac{\cos \,.\, nz}{n'} = \int \frac{(-1)^{\beta} \cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{2\beta} z}{\alpha' \;\; (2\beta)'} \qquad \alpha + 2\beta = n$$

$$\frac{\sin \,.\, nz}{n'} = \int \frac{(-1)^{\beta} \cos^{\alpha} z \,.\, \sin^{2\beta+1} z}{\alpha' \;\; (2\beta+1)'} \qquad \alpha + 2\beta = n - 1$$

welches die Formeln 1) und 2) des §. 39. waren, die also nur besondere Fälle der Formeln 2) und 3) des 2.) Zusatzes sind.

4.) *Zusatz.* Setzt man in der Formel 1) des §. selbst $x = z$, $y = z$, $w = v$, so erhält man, weil bekanntlich $\sin 2z = 2 \sin z \,.\, \cos z$ ist,

$$\frac{2^n \sin^n z \,.\, \cos^n z \,.\, \sin v}{n'} = \int \frac{\sin^{\alpha} z \,.\, \sin^{\beta} z \,.\, \sin (v + \alpha z - \beta z)}{\alpha' \;\; \beta'} \qquad \alpha + \beta = n$$

oder durch $\sin^n z$ beiderseits dividirt

$$\frac{2^n \cos z \,.\, \sin v}{n'} = \int \frac{\sin (v + \alpha z - \beta z)}{\alpha' \beta'}$$
$$\alpha + \beta = n$$

welches die Formel des 1.) Zusatzes zu §. 40. ist. Setzt man hier statt v erst 90°, dann 0°, so bekommt man die beiden Formeln 1) und 2) des §. 40. selbst.

5.) *Zusatz.* Nach §. 26. 1.) Zus. ist

$$\int \frac{\alpha \sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin (w + \alpha y - \beta x)}{\alpha' \beta'} =$$
$$\alpha + \beta = n + 1$$
$$\int \frac{\sin^{\alpha+1} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin (w + y + \alpha y - \beta x)}{\alpha' \beta'}$$
$$\alpha + \beta = n$$

Das letztere Integral ist nach der Formel 1) des §, wenn man darinnen $w + y$ statt w setzt, gleich $\frac{\sin x \,.\, \sin^n (x+y) \,.\, \sin (w+y)}{n'}$, man hat also

$$1) \int \frac{\alpha \sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin (w + \alpha y - \beta x)}{\alpha' \beta'} = \frac{\sin x \,.\, \sin^n (x+y) \,.\, \sin (w+y)}{n'}$$
$$\alpha + \beta = n + 1$$

Eben so hat man

$$2) \int \frac{\beta \sin^{\alpha} x \,.\, \sin^{\beta} y \,.\, \sin (w + \alpha y - \beta x)}{\alpha' \beta'} = \frac{\sin y \,.\, \sin^n (x+y) \,.\, \sin (w-x)}{n'}$$
$$\alpha + \beta = n + 1$$

6.) *Zusatz.* Nun ist es auch leicht den Werth des combinatorischen Integrals

$$\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} \sin (w + \alpha x + \beta y)}{\alpha' \beta'}$$
$$\alpha + \beta = n$$

zu entwickeln. Dann giebt es nehmlich noch eine Zahl c, und einen Winkel z von der Beschaffenheit, dafs die beiden Gleichungen

$$a\cos x + b\cos y = c\cos z$$
$$a\sin x + b\sin y = c\sin z$$

statt finden. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit sin . v, die andere mit cos . v und addirt die Resultate, so erhält man

$$(\odot)\quad a\sin(x+v) + b\sin(y+v) = c\sin(z+v)$$

Da nun der Winkel v hier ganz willkührlich ist, so erhält man, wenn man statt v erst - x dann - y setzt

$$b\sin(y-x) = c\sin(z-x)$$
$$a\sin(x-y) = c\sin(z-y)$$

Daraus folgt, dafs sich verhält

$$a : b : c = \sin(y-z) : \sin(z-x) : \sin(y-x)$$

Setzt man nun in der Formel 1) des 1.) Zusatzes $v = z$, und verwechselt man die Buchstaben α und β im Integrale, so hat man

$$\frac{\sin^n(y-x)\,.\,\sin(w+nz)}{n'} = \int \frac{\sin^{\alpha}(y-z)\,.\,\sin^{\beta}(z-x)\,.\,\sin(w+\alpha x+\beta y)}{\alpha'\ \beta'}$$
$$\alpha+\beta=n$$

Es ist demnach auch unter gedachter Annahme, dafs

$$a\cos x + b\cos y = c\cos z$$
$$a\sin x + b\sin y = c\sin z$$

nothwendig

$$1)\quad \int \frac{a^{\alpha}b^{\beta}\sin(w+\alpha x+\beta y)}{\alpha'\ \beta'} = \frac{c^n\sin(w+nz)}{n'}$$
$$\alpha+\beta=n$$

und wenn man statt w erst 90°, dann 0° setzt,

$$2)\quad \int \frac{a^{\alpha}b^{\beta}\cos(\alpha x+\beta y)}{\alpha'\ \beta'} = \frac{c^n\cos.nz}{n'}$$
$$\alpha+\beta=n$$

$$3)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^{\alpha} b^{\beta} \sin(\alpha x+\beta y)}{\alpha'\ \beta'} = \frac{c^{n} \sin . nz}{n'}$$

Aber auch ganz unabhängig von der Formel 1) des 1.) Zusatzes könnte man den Beweis so führen. Es ist

$$\int^{\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\alpha\,\delta'\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \sin(w+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\delta'\, a^{\alpha+1} b^{\beta} c^{\gamma} \sin(w+x+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\beta\,\delta'\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \sin(w+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\delta'\, a^{\alpha} b^{\beta+1} c^{\gamma} \sin(w+y+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha'\ \beta'}$$

also, wenn man addirt, rechts nach obiger Formel (⊙)

$$\int^{\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{(\delta+1)'\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \sin(w+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1} \frac{\delta'\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma+1} \sin(w+z+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha'\ \beta'}$$

Diese Formel von dem combinatorischen Integrale

$$\int^{\alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n} \frac{\delta'\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \sin(w+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha'\ \beta'}$$

abgezogen, giebt nach §. 26.

$$\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \sin(w+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha' \beta'} = \int \frac{\delta' a^{\alpha} b^{\beta} \sin(w+\alpha x+\beta y)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=0, \quad \gamma=n \qquad\qquad \alpha+\beta=\delta, \quad \delta=n$$

oder, welches einerlei ist

$$c^n \sin(w+nz) = \int \frac{(\alpha+\beta)' a^{\alpha} b^{\beta} \sin(w+\alpha x+b\gamma)}{\alpha' \beta'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

und diese Formel durch n' dividirt giebt die Formel 1).

§. 42.

Der trinomische und überhaupt polynomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten nebst verwandten Sätzen.

Gerade so wie in §. 38. läfst sich beweisen, dafs, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}}{\alpha' \beta' \gamma'} = \frac{(a+b+c)^n}{n'}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=n$$

seyn müsse. Man kann aber auch diese Gleichung aus §. 38, nach §. 17. folgendermafsen beweisen. Nach §. 38. 1) ist nehmlich

$$\int \frac{a^{\alpha}(b+c)^{\delta}}{\alpha' \delta'} = \frac{(a+b+c)^n}{n'}$$

$$\alpha+\delta=n$$

so wie

$$\frac{(b+c)^{\delta}}{\delta'} = \int \frac{b^{\beta} c^{\gamma}}{\beta' \gamma'}$$

$$(\beta,\gamma)$$

$$\beta+\gamma=\delta$$

Weil nehmlich in dieser letzten Gleichung δ unveränderlich ist, so ist das Verzeichnifs der veränderlichen Gröfsen nach §. 7. Zus. nöthig. Aus dieser letzten Gleichung folgt nach §. 3.

$$\frac{a^{\alpha}(b+c)^{\delta}}{\alpha'\,\delta'} = \overline{\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}}$$
$$(\beta,\ \gamma)$$
$$\beta+\gamma=\delta$$

mithin ist auch nach §. 17.

$$\overline{\int \frac{a^{\alpha}\ b+c)^{\delta}}{\alpha'\,\delta'}} = \overline{\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}}$$
$$(\alpha,\ \delta) \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$$
$$\alpha+\delta=n \qquad \beta+\gamma=\delta,\ \alpha+\delta=n$$

oder welches nach §. 7. Zus. einerlei ist

$$\overline{\int \frac{a^{\alpha}(b+c)^{\delta}}{\alpha'\,\delta'}} = \overline{\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}}$$
$$\alpha+\delta=n \qquad \beta+\gamma=\delta,\ \alpha+\delta=n$$

oder nach §. 15. und voriger Gleichung

$$\frac{(a+b+c)^{n}}{n'} = \overline{\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}}$$
$$\alpha+\beta+\gamma=n$$

und diese Formel enthält den trinomischen Lehrsatz für einen ganzen positiven Exponenten n.

1) *Zusatz.* Man sieht nun auch leicht ein, wie man den quadrinomischen, und überhaupt den polynomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten beweisen könne. Es ist nehmlich, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet.

$$\frac{(a+b+c+\ldots)^{n}}{n'} = \overline{\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\ldots}}$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=n$$

Diese Darstellung des polynomischen Lehrsatzes für solche Exponenten ist eben so merkwürdig als einfach.

2.) *Zusatz.* Gerade so wie in §. 41. 6.) Zus. läfst sich ferner beweisen, dafs wenn a, b, c bestimmte Zahlen, x, y, z bestimmte Winkel, w einen andern Winkel, und n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, nothwendig

$$\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \sin.(w+\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\alpha' \beta' \gamma'} = \frac{d^n \sin(w+n v)}{n'}$$

$$\alpha+\beta+\gamma = n$$

seyn müsse, daferne die Zahl d und der Winkel v so durch a, b, c, x, y, z bestimmt wird, dafs

$$a\cos x + b\cos y + c\cos z = d\cos v$$
$$a\sin x + b\sin y + c\sin z = d\sin v$$

ist.

3.) *Zusatz.* Was im vorigen Zusatze von drei Zahlen und Winkeln erwiesen worden, läfst sich ferner auf jede Anzahl erweitern, man hat nehmlich allgemein

$$\int \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots. \sin(w+\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots)}{\alpha' \beta' \gamma' \ldots\ldots} = \frac{s^n \sin(w+nS)}{n'}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots. = n$$

daferne die Zahl s und der Winkel S so durch a, b, c u. s. w. A, B, C u. s. w. bestimmt ist, dafs

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C + \ldots = s\cos S$$
$$a\sin A + b\sin B + c\sin C + \ldots = s\sin S$$

ist.

§. 43.

Die Summation der geometrischen Reihe.

Diese ebenfalls sehr bekannte Summation läfst sich durch combinatorische Integrale und deren Calcul *äufserst kurz*, nehmlich so erweisen. Nach §. 3. und §. 26. ist

$$a\int\overline{a^{\alpha}b^{\beta}} = \int\overline{a^{\alpha+1}b^{\beta}} = \int\overline{a^{\alpha}b^{\beta}} - b^{n}$$
$$\alpha+\beta=n-1 \qquad \alpha+\beta=n-1 \qquad \alpha+\beta=n$$

$$b\int\overline{a^{\alpha}b^{\beta}} = \int\overline{a^{\alpha}b^{\beta+1}} = \int\overline{a^{\alpha}b^{\beta}} - a^{n}$$
$$a+\beta=n-1 \qquad \alpha+\beta=n-1 \qquad \alpha+\beta=n$$

also, wenn man abzieht

$$(a-b)\int\overline{a^{\alpha}b^{\beta}} = a^{n}-b^{n}$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

folglich

$$\int\overline{a^{\alpha}b^{\beta}} = \frac{a^{n}-b^{n}}{a-b} = \frac{b^{n}-a^{n}}{b-a} = \frac{a^{n}}{a-b} + \frac{b^{n}}{b-a}$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

§. 44.

Ein anderer hieher gehöriger merkwürdiger Satz.

Nach §. 3. und bekannten trigonometrischen Relationen ist

$$\int 2a^{\alpha+1}b^{\beta+1}\sin.(w+\alpha x).\cos.x = \int a^{\alpha+1}b^{\beta+1}\sin.(w+\alpha x+x) + \int a^{\alpha+1}b^{\beta+1}\sin.(w+\alpha x-x)$$
$$\alpha+\beta=n-1 \qquad \alpha+\beta=n-1 \qquad \alpha+\beta=n-1$$

Nun ist aber

$$\int a^{\alpha+1}b^{\beta+1}\sin.(w+\alpha x+x) + b^{n+1}\sin.w =$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

$$\int a^{\alpha}b^{\beta+2}\sin.(w+\alpha x) + a^{n}b\sin.(w+nx)$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

denn beides ist nach §. 26. gleich

$$\int a^{\alpha}b^{\beta+1}\sin.(w+\alpha x)$$
$$\alpha+\beta=n$$

und eben so

$$\int_{\alpha+\beta=n-1} a^{\alpha+1} b^{\beta+1} \sin.(w+\alpha x-x) + a^{n+1}\sin.(w+(n-1)x) =$$

$$\int_{\alpha+\beta=n-1} a^{\alpha+2} b^{\beta} \sin.(w+\alpha x) + a b^{n} \sin.(w-x)$$

denn beides ist nach §. 26. gleich

$$\int_{\alpha+\beta=n} a^{\alpha+1} b^{\beta} \sin.(w+\alpha x-x)$$

Hieraus hat man

$$\int_{\alpha+\beta=n-1} 2a^{\alpha+1} b^{\beta+1} \sin.(w+\alpha x).\cos.x + b^{n+1}\sin.w + a^{n+1}\sin.(w+(n-1)x) =$$

$$\int_{\alpha+\beta=n-1} a^{\alpha} b^{\beta+2} \sin.(w+\alpha x) + \int_{\alpha+\beta=n-1} a^{\alpha+2} b^{\beta} \sin.(w+\alpha x) + a^{n} b \sin.(w+nx) + a b^{n} \sin.(w-x)$$

woraus sich nun leicht nach §. 3. ergiebt

1) $$\frac{a^{n+1}\sin.(w+(n-1)x) - a^{n} b \sin.(w+nx) - a b^{n} \sin.(w-x) + b^{n+1}\sin.w}{a^2 - 2ab\cos x + b^2} = \int_{\alpha+\beta=n-1} a^{\alpha} b^{\beta} \sin.(w+\alpha x)$$

und wenn man statt w erst 9° dann 0° setzt

2) $$\frac{a^{n+1}\cos.(n-1)x - a^{n} b \cos.nx - a b^{n}\cos.x + b^{n+1}}{a^2 - 2ab\cos.x + b^2} = \int_{\alpha+\beta=n-1} a^{\alpha} b^{\beta} \cos.\alpha x$$

3) $$\frac{a^{n+1}\sin.(n-1)x - a^{n} b \sin.nx + a b^{n}\sin.x}{a^2 - 2ab\cos.x + b^2} = \int_{\alpha+\beta=n-1} a^{\alpha} b^{\beta} \sin.\alpha x$$

Die Formel 1) läfst sich aus den Formeln 2) und 3) zusammensetzen.

Zusatz. Setzt man in der Formel 1) $w+(n-1)y$, $x-y$ statt w, x, so erhält man

1) $$\frac{a^{n+1}\sin.(w+(n-1)x)-a^n b\sin.(w+nx-y)-ab^n\sin.(w+ny-x)+b^{n+1}\sin.(w+(n-1)y)}{a^2-2ab\cos(x-y)+b^2} = \int a^\alpha b^\beta \sin.(w+\alpha x+\beta y)$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

und wenn man auch hier statt w erst 90° dann 0° setzt

2) $$\frac{a^{n+1}\cos.(n-1)x-a^n b\cos.(nx-y)-ab^n\cos.(ny-x)+b^{n+1}\cos.(n-1)y}{a^2-2ab\cos(x-y)+b^2} = \int a^\alpha b^\beta \cos.(\alpha x+\beta y)$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

3) $$\frac{a^{n+1}\sin.(n-1)x-a^n b\sin.(nx-y)-ab^n\sin.(ny-x)+b^{n+1}\sin.(n-1)y}{a^2-2ab\cos(x-y)+b^2} = \int a^\alpha b^\beta \sin.(\alpha x+\beta y)$$
$$\alpha+\beta=n-1$$

Auch hier kann man die Formel 1) aus den Formeln 2) und 3) zusammensetzen, so wie auch 1) aus 3) dadurch ableiten, dafs man $x+\frac{w}{n-1}$, $y+\frac{w}{n-1}$ statt x, y setzt, welche Substitution nur für $n=1$ unzuläfsig ist; in diesem Falle aber erhellet die Richtigkeit von 1) von selbst.

§. 45.

Der binomische Lehrsatz für Factoriellen und ganze positive Exponenten, nebst verwandten Sätzen.

Dieser merkwürdige, jedoch nicht so bekannte Lehrsatz als der für Potenzen, läfst sich ebenfalls sehr kurz erweisen. Wir wollen gleich alle Schlüsse, wie zuletzt in §. 38., concentrirt darstellen.

Nach §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 2.) Zus. ist

$$\int \frac{\alpha\delta' a^{\alpha|r} b^{\beta|r} (a+b+(\delta+1)r)^{\gamma|r}}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{\delta' a^{\alpha+1|r} b^{\beta|r} (a+b+(\delta+1)r)^{\gamma|r}}{\alpha'\ \beta'}$$
$$\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1 \qquad \alpha+\beta=\delta,\ \gamma+\delta=n-1$$

$$\int \frac{\beta\,\delta^{l}\,a^{\alpha\,l\,r}\,b^{\beta\,l\,r}(a+b+(\delta+1)\,r)^{\gamma\,l\,r}}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta=\delta+1,\ \gamma+\delta=n-1$$

$$\int \frac{\delta^{l}\,a^{\alpha\,l\,r}\,b^{\beta+1\,l\,r}(a+b+(\delta+1)\,r)^{\gamma\,l\,r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta,\ \ \gamma+\delta=n-1$$

Addirt man diese Gleichungen nach §. 3., so erhält man, *links* nach §. 36. 2.) Zus., indem $(\alpha+\beta)\,\delta^{l} = (\delta+1)\,\delta^{l} = (\delta+1)^{l}$, und *rechts*, weil nach §. 34. 4) $a^{\alpha+1\,l\,r} = a^{\alpha\,l\,r}(a+\alpha r)$, $b^{\beta+1\,l\,r} = b^{\beta\,l\,r}(b+\beta r)$, so wie nach §. 35. 5) $(a+b+\alpha r+\beta r)\,(a+b+(\delta+1)\,r)^{\gamma\,l\,r} = (a+b+\delta r)\,(a+b+(\delta+1)\,r)^{\gamma\,l\,r} = (a+b+\delta r)^{\gamma+1\,l\,r}$, die Gleichung

$$\int \frac{(\delta+1)^{l}\,a^{\alpha\,l\,r}\,b^{\beta\,l\,r}\,(a+b+(\delta+1)\,r)^{\gamma\,l\,r}}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta=\delta+1,\ \ \gamma+\delta=n-1,$$

$$\int \frac{\delta^{l}\,a^{\alpha\,l\,r}\,b^{\beta\,l\,r}\,(a+b+\delta r)^{\gamma+1\,l\,r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta,\ \ \gamma+\delta=n-1$$

Zieht man nun diese Gleichung ab vom combinatorischen Integrale

$$\int \frac{\delta^{l}\,a^{\alpha\,l\,r}\,b^{\beta\,l\,r}\,(a+b+\delta r)^{\gamma\,l\,r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta,\ \ \gamma+\delta=n$$

so erhält man nach §. 26.

$$\int \frac{a^{\alpha\,l\,r}\,b^{\beta\,l\,r}\,(a+b)^{\gamma\,l\,r}}{\alpha'\ \beta'} = \int \frac{\delta^{l}\,a^{\alpha\,l\,r}\,b^{\beta\,l\,r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=0,\ \gamma=n \qquad\qquad \alpha+\beta=\delta,\ \delta=n$$

oder welches einerlei ist, nach §. 15.

$$1)\quad (a+b)^{n\,|\,r} = \int^{\alpha+\beta=n} \frac{(\alpha+\beta)^{\,|\,r}}{\alpha^{\,|\,r}\,\beta^{\,|\,r}}\, a^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}$$

und diese Gleichung enthält den binomischen Lehrsatz für Factoriellen und einen ganzen positiven Exponenten n. Dividirt man sie durch n', so bekommt man

$$2)\quad \frac{(a+b)^{n\,|\,r}}{n'} = \int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}}{\alpha^{\,|\,r}\,\beta^{\,|\,r}}$$

1.) *Zusatz.* Für $r=0$ erhält man so die beiden Gleichungen in §. 38. als besondere Fälle von diesen beiden. Nichts desto weniger hat es mir nützlich geschienen, diesen besondern Fall erst zu entwickeln.

2.) *Zusatz.* Für $r=-1$ aber verwandelt sich die Gleichung 2) nach der in §. 37. erklärten Bezeichnung in folgende:

$$(a+b)_n = \int^{\alpha+\beta=n} a_\alpha\, b_\beta$$

3.) *Zusatz.* Nach §. 26. 1.) Zus. §. 35. 5) und der Formel 2) des gegenwärtigen §. hat man

$$\int^{\alpha+\beta=n+1} \frac{\alpha\, a^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}}{\alpha^{\,|\,r}\,\beta^{\,|\,r}} = \int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^{\alpha+1\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}}{\alpha^{\,|\,r}\,\beta^{\,|\,r}} =$$

$$a \cdot \int^{\alpha+\beta=n} \frac{(a+r)^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}}{\alpha^{\,|\,r}\,\beta^{\,|\,r}} = a \cdot \frac{(a+b+r)^{n\,|\,r}}{n'}$$

also

$$3)\quad \int^{\alpha+\beta=n+1} \alpha \cdot \frac{a^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}}{\alpha^{\,|\,r}\,\beta^{\,|\,r}} = a \cdot \frac{(a+b+r)^{n\,|\,r}}{n'}$$

und eben so

$$2)\ \int^{\alpha+\beta=n+1}_{\beta} \frac{a^{\alpha\,1\,r}\,b^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\ \beta'} = b\cdot\frac{(a+b+r)^{n\,1\,r}}{n'}$$

4.) *Zusatz.* Ist daher $a+b$ nicht Null, so kann man auch setzen

$$1)\ \int^{\alpha+\beta=n}_{\alpha} \frac{a^{\alpha\,1\,r}\,b^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{n\,a}{a+b}\cdot\frac{(a+b)^{n\,1\,r}}{n'}$$

$$2)\ \int^{\alpha+\beta=n}_{\beta} \frac{a^{\alpha\,1\,r}\,b^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{n\,b}{a+b}\cdot\frac{(a+b)^{n\,1\,r}}{n'}$$

5.) *Zusatz.* Ist hingegen $a+b=0$ oder $b=-a$, so hat man aus 3.) Zus. und nach §. 35. 2)

$$1)\ \int^{\alpha+\beta=n+1}_{\alpha} \frac{a^{\alpha\,1\,r}\,(-a)^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\ \beta'} = a\cdot\frac{r^{n\,1\,r}}{n'} = a\,.\,r^{n}$$

$$2)\ \int^{\alpha+\beta=n+1}_{\beta} \frac{a^{\alpha\,1\,r}\,(-a)^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\ \beta'} = -a\cdot\frac{r^{n\,1\,r}}{n'} = -a\,.\,r^{n}$$

6.) *Zusatz.* Für $b=(n+1)\,f-a$, wo jedoch f nicht Null ist, hat man nach 3.) Zus. und §. 35. 5), so wie §. 36. 2.) Zus.

$$1)\ \int^{\alpha+\beta=n+1}_{\alpha} \frac{a^{\alpha\,1\,r}\,(\alpha f+\beta f-a)^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\ \beta'} = a\cdot\frac{((n+1)f+r)^{n\,1\,r}}{n'} = \frac{a}{f}\cdot\frac{((n+1)f)^{n+1\,1\,r}}{(n+1)'}$$

$$2)\ \int^{\alpha+\beta=n+1}_{\beta} \frac{a^{\alpha\,1\,r}\,(\alpha f+\beta f-a)^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\ \beta'} = ((n+1)f-a)\cdot\frac{((n+1)f+r)^{n\,1\,r}}{n'} =$$

$$\frac{(n+1)\,f-a}{f}\cdot\frac{((n+1)f)^{n+1\,1\,r}}{(n+1)'}$$

7.) *Zusatz.* Man würde aber sehr irren, wenn man diese beiden Formeln auch für $n = -1$ als richtig annehmen wollte. Denn dann werden beide combinatorischen Integrale o. Die erste Gröfse rechts hingegen wird $\frac{a}{f} \cdot \frac{o^{o\,1\,r}}{o'} = \frac{a}{f}$, und die andere $-\frac{a}{f} \cdot \frac{o^{o\,1\,r}}{o'} = -\frac{a}{f}$. Will man also die Formeln des vorigen Zusatzes so abändern, dafs sie auch noch für $n = -1$ gelten sollen, oder will man darinnen $n-1$ statt n setzen, so kann dies so geschehen:

$$1)\quad \int_{\alpha+\beta=n}^{\alpha} \frac{a^{\alpha\,1\,r}(\alpha f+\beta f-a)^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{a}{f}\cdot\left(\frac{(nf)^{n\,1\,r}}{n'} - o^n\right)$$

$$2)\quad \int_{\alpha+\beta=n}^{\beta} \frac{a^{\alpha\,1\,r}(\alpha f+\beta f-a)^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{nf-a}{f}\cdot\frac{(nf)^{n\,1\,r}}{n'} + \frac{a}{f}\cdot o^n$$

8.) *Zusatz.* Setzt man in der Formel 2) des §. selbst $-mr$ statt a, wo m Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man

$$\int_{\alpha+\beta=n} \frac{(-mr)^{\alpha\,1\,r}\,b^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(b-mr)^{n\,1\,r}}{n'}$$

Allein der Factor $(-mr)^{\alpha\,1\,r}$ des allgemeinen Gliedes verschwindet allemal, wenn $\alpha \geqq m+1$ ist. Man kann also nach §. 28. 2.) Zus. die Bedingungsgleichung $\alpha+\gamma=m$ hinzufügen, und erhält so

$$\int_{\alpha+\gamma=m,\ \alpha+\beta=n} \frac{(-\alpha r-\gamma r)^{\alpha\,1\,r}\,b^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(b-mr)^{n\,1\,r}}{n'}$$

oder, welches nach §. 35. 2) einerlei ist

$$\int_{\alpha+\gamma=m,\ \alpha+\beta=n} \frac{(-r)^{\alpha}(\alpha+\gamma)^{\alpha\,1-1}\,b^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(b-mr)^{n\,1\,r}}{n'}$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch $(\alpha+\gamma)^{l} = m^{l}$, so erhält man nach §. 36. 1.) Zus. die merkwürdige Formel

$$\int \frac{(-r)^{\alpha}\, b^{\beta|r}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}} = \frac{(b-mr)^{n|r}}{m^{l}\ n^{l}}$$

$$\alpha+\gamma=m,\ \alpha+\beta=n$$

9.) *Zusatz.* Setzt man in der Formel des vorigen Zusatzes $b+mr$ statt b, so erhält man

$$\int \frac{(-r)^{\alpha}\, (b+mr)^{\beta|r}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}} = \frac{b^{n|r}}{m^{l}\ n^{l}}$$

$$\alpha+\gamma=m,\ \alpha+\beta=n$$

Multiplicirt man diese Formel mit $b^{m|r}$, so erhält man nach §. 3. und §. 35. 6)

$$\int \frac{(-r)^{\alpha}\, b^{m+\beta|r}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}} = \frac{b^{m|r}\, b^{n|r}}{m^{l}\ n^{l}}$$

$$\alpha+\gamma=m,\ \alpha+\beta=n$$

oder, welches einerlei ist

$$\int \frac{(-r)^{\alpha}\, b^{\alpha+\beta+\gamma|r}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}} = \frac{b^{m|r}\, b^{n|r}}{m^{l}\ n^{l}}$$

$$\alpha+\gamma=m,\ \alpha+\beta=n$$

welches ebenfalls eine höchst merkwürdige Formel ist.

10.) *Zusatz.* Bedeutet auſser m und n auch noch l Null oder eine ganze positive Zahl, und setzt man in der Formel des 8.) Zusatzes $b=1$, $r=-1$, so erhält man

$$\int \frac{1^{\beta|-1}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}} = \frac{(1+m)^{n|-1}}{m^{l}\ n^{l}}$$

$$\alpha+\gamma=m,\ \alpha+\beta=n$$

Allein das allgemeine Glied des combinatorischen Integrals verschwindet sobald $\beta \gtrless 1$ ist. Man kann also nach §. 28. 2.) Zus. die Bedingungsgleichung $\beta+\delta=1$ hinzufügen, und so erhält man

$$\int^{\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=l,\ \alpha+\beta=n} \frac{(\beta+\delta)^{\beta\,l-r}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}} = \frac{(l+m)^{n\,l-r}}{m^{l}\ n^{l}}$$

oder, wenn man durch $(\beta+\delta)^{l} = l^{l}$ nach §. 36. 1.) Zus. dividirt

$$\int^{\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=l,\ \alpha+\beta=n} \frac{1}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}\ \delta^{l}} = \frac{(l+m)^{n\,l-1}}{l^{l}\ m^{l}\ n^{l}}$$

11.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in der letzten Gleichung des vorigen Zusatzes ergiebt sich sogleich die Gleichung $\gamma+\delta=l+m-n$. Daraus erhellet, dafs diese Bedingungsgleichungen unauflösbar sind, sobald $l+m<n$ ist, mithin nach §. 6. 1.) Zus. der Werth des combinatorischen Integrals dann o sey. Dafs aber auch dann die Gröfse rechts o sey, ist ebenfalls offenbar. Sollen also beide Glieder dieser Gleichung nicht Null seyn, so mufs $l+m \geqq n$, folglich auch $l+m-n$ Null oder eine ganze positive Zahl seyn. Bezeichnet man nun diese mit k, so erhellet mit Zuziehung von §. 36. 1.) Zus. die Richtigkeit der Gleichung

$$\int^{\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=l,\ \alpha+\beta=n,\ \gamma+\delta=k} \frac{1}{\alpha^{l}\ \beta^{l}\ \gamma^{l}\ \delta^{N}} = \int^{l+m=k+n} \frac{(l+m)^{l}}{k^{l}\ l^{l}\ m^{l}\ n^{l}}$$

Das Integral in dieser Gleichung auf der rechten Seite ist von der Beschaffenheit wie in §. 34. 4.) Zus.; es ist nehmlich darinnen zwar *keine veränderliche Gröfse* wohl aber *eine Bedingungsgleichung* zwischen unveränderlichen Gröfsen vorhanden.

12.) *Zusatz.* Für $b=r$ erhält man aus der Formel 2) des §. selbst nach §. 35. 2) die Gleichung

$$\int^{\alpha+\beta=n} \frac{a^{\alpha\,l\,r}}{\alpha^{l}} r^{\beta} = \frac{(a+r)^{n\,l\,r}}{n^{l}}$$

Diese Gleichung kann man aber auch noch auf eine ganz andere Art sehr leicht und kurz beweisen. Nach §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 3.) Zus. ist nehmlich

$$\int \frac{(a+r)^{\alpha\,|\,r} - a^{\alpha\,|\,r}}{\alpha'} \cdot r^{\beta} = \int \frac{(a+r)^{\alpha+1\,|\,r} - a^{\alpha+1\,|\,r}}{(\alpha+1)'} \cdot r^{\beta}$$

$$\alpha+\beta=n \qquad\qquad \alpha+\beta=n-1$$

Diese Gleichung abgezogen von dem combinatorischen Integrale

$$\int \frac{(a+r)^{\alpha\,|\,r}}{\alpha'} \cdot r^{\beta}$$

$$\alpha+\beta=n$$

giebt nach §. 3. und §. 26. die zu beweisende Formel.

§. 46.

Ein anderer hieher gehöriger Satz.

Man setze in der Formel 2) des vorigen §. $r-a$, $a+mr-nr$ statt a, b, wo n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, m aber jede *ganze* Zahl seyn kann, so erhält man

$$\int \frac{(r-a)^{\alpha\,|\,r}}{\alpha'} \frac{(a+mr-nr)^{\beta\,|\,r}}{\beta'} = \frac{(mr-nr+r)^{n\,|\,r}}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

oder welches nach §. 35. 1), 2) und 3) daſselbe ist

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}\,(a-\alpha r)^{\alpha\,|\,r}\,(a+mr-nr)^{\beta\,|\,r}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{(mr)^{n\,|\,-r}}{n'} = \frac{r^n m^{n\,|\,-r}}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $a^{m-n\,|\,r}$, so erhält man nach §. 3. und §. 35. 6) die Gleichung

$$1)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{(-1)^{\alpha}(a-\alpha r)^{m\,l\,r}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \frac{r^{n}\,m^{n\,l-1}\,a^{m-n\,l\,r}}{n^{l}}$$

Setzt man hier $-r$ statt r, und multiplicirt mit $(-1)^{n}$, so erhält man

$$2)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{(-1)^{\beta}(a+\alpha r)^{m\,l-r}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \frac{r^{n}\,m^{n\,l-1}\,a^{m-n\,l-r}}{n^{l}}$$

Setzt man in der Formel 1) $a+n\,r$, und in der Formel 2) $a-n\,r$ statt a, so erhält man

$$3)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{(-1)^{\alpha}(a+\beta r)^{m\,l\,r}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \frac{r^{n}\,m^{n\,l-1}(a+n\,r)^{m-n\,l\,r}}{n^{l}}$$

$$4)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{(-1)^{\beta}(a-\beta r)^{m\,l-r}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \frac{r^{n}\,m^{n\,l-1}(a-n\,r)^{m-n\,l-r}}{n^{l}}$$

Setzte man in der Formel 1) $a-m\,r+r$ statt a, so erhielte man nach §. 35. 1) auch die Formel 4), nur dafs α und β verwechselt werden.

1.) *Zusatz.* Ist m Null oder eine ganze positive Zahl, und zugleich $m < n$, so verschwindet der Factor $m^{n\,l-1}$ *rechts* in den vorhin angeführten vier Gleichungen, mithin werden auch die combinatorischen Integrale *links* dann gleich Null.

2.) *Zusatz.* Setzt man aber in der Formel 1) des §. $-m$, $b-r$, $-r$ statt m, a, r, so erhält man

$$\int^{\alpha+\beta=n} \frac{(-1)^{\alpha}(b-r+\alpha r)^{-m\,l-r}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \frac{(-r)^{n}(-m)^{n\,l-1}(b-r)^{-m-n\,l-r}}{n^{l}}$$

oder, welches nach §. 35. 2) und 15) im 2.) Zus. einerlei ist

$$1)\quad \int\overline{\frac{(-1)}{\alpha'\beta'(b+\alpha r)^{m|1}r}} = \frac{r^n m^{n|1}}{n' b^{m+n|1}r}$$
$$\alpha+\beta=n$$

Setzt man hier $-r$ statt r, und multiplicirt mit $(-1)^n$, so erhält man

$$2)\quad \int\overline{\frac{(-1)^\beta}{\alpha'\beta'(b-\alpha r)^{m|-r}}} = \frac{r^n m^{n|1}}{n' b^{m+n|-r}}$$
$$\alpha+\beta=n$$

Setzt man in der Formel 1) $b-nr$, in der Formel 2) aber $b+nr$ statt b, so erhält man

$$3)\quad \int\overline{\frac{(-1)^\alpha}{\alpha'\beta'(b-\beta r)^{m|r}}} = \frac{r^n m^{n|1}}{n'(b-nr)^{m+n|r}}$$
$$\alpha+\beta=n$$

$$4)\quad \int\overline{\frac{(-1)^\beta}{\alpha'\beta'(b+\beta r)^{m|-r}}} = \frac{r^n m^{n|1}}{n'(b+nr)^{m+n|-r}}$$
$$\alpha+\beta=n$$

Setzte man in der Formel 1) $b-mr+r$ statt b, so erhielte man nach §. 35. 1) auch die Formel 4), nur dafs α und β verwechselt werden.

3.) *Zusatz.* Für $m=1$ erhält man als besondere Fälle aus den vier Formeln des vorigen Zusatzes

$$1)\int\overline{\frac{(-1)^\alpha}{\alpha'\beta'(b+\alpha r)}} = \frac{r^n}{b^{n+1|r}},\qquad 2)\int\overline{\frac{(-1)^\beta}{\alpha'\beta'(b-\alpha r)}} = \frac{r^n}{b^{n+1|-r}}$$
$$\alpha+\beta=n \qquad\qquad \alpha+\beta=n$$

$$3)\int\overline{\frac{(-1)^\alpha}{\alpha'\beta'(b-\beta r)}} = \frac{r^n}{(b-nr)^{n+1|r}},\qquad 4)\int\overline{\frac{(-1)^\beta}{\alpha'\beta'(b+\beta r)}} = \frac{r^n}{(b+nr)^{n+1|-r}}$$
$$\alpha+\beta=n \qquad\qquad \alpha+\beta=n$$

wovon aber die Formeln 1) und 4) desgleichen 2) und 3) einerlei sind.

§. 47.

Der trinomische Lehrsatz für Factoriellen und ganze positive Exponenten nebst andern verwandten Sätzen.

Gerade auf die nehmliche Art wie in §. 45. kann man erweisen, dafs, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$1)\quad (a+b+c)^{n\,|\,r} = \int \frac{(\alpha+\beta+\gamma)'}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}\, a^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}\, c^{\gamma\,|\,r}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=n$$

seyn müsse. Daraus folgt nun durch Division durch n'

$$2)\quad \frac{(a+b+c)^{n\,|\,r}}{n'} = \int \frac{a^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}\, c^{\gamma\,|\,r}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=n$$

Die Gleichung 1) enthält den trinomischen Lehrsatz für Factoriellen und den Exponenten n. Die Gleichung 2) könnte man auch aus §. 45. nach §. 17. auf ähnliche Art, wie in §. 42. ableiten.

1.) *Zusatz.* Setzt man in der Gleichung 2) $a = -mr$, wo m ebenfalls Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man auf ähnliche Art wie in §. 45. 8.) Zus.

$$\int \frac{(-r)^{\alpha}\, b^{\beta\,|\,r}\, c^{\gamma\,|\,r}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'} = \frac{(b+c-mr)^{n\,|\,r}}{m'\,n'}$$

$$\alpha+\delta=m,\ \alpha+\beta+\gamma=n$$

2.) *Zusatz.* Setzt man in dieser Gleichung wieder $b=-lr$, wo auch noch l Null oder eine ganze positive Zahl ist, so erhält man auf ähnliche Art

$$\int \frac{(-r)^{\alpha+\beta}\, c^{\gamma\,|\,r}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'} = \frac{(c-lr-mr)^{n\,|\,r}}{l'\,m'\,n'}$$

$$\alpha+\delta=m,\ \beta+\varepsilon=l,\ \alpha+\beta+\gamma=n$$

3.) *Zusatz.* Setzt man in dieser Gleichung wieder $c=-kr$, wo auch noch k Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, und dividirt

man dann durch $(-r)^n$, so erhält man auf eine ähnliche Art

$$\int \frac{1}{\alpha^l \beta^l \gamma^l \delta^l \varepsilon^l \zeta^l} = \frac{(k+l+m)^{n\,l-1}}{k^l\, l^l\, m^l\, n^l}$$

$$\alpha+\delta=m,\ \beta+\varepsilon=l,\ \gamma+\zeta=k,$$
$$\alpha+\beta+\gamma=n$$

4.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in voriger Gleichung, ergiebt sich sogleich auch $\delta+\varepsilon+\zeta = k+l+m-n$. Daraus erhellet, dafs die Bedingungsgleichungen unauflösbar sind, wenn $k+l+m < n$ ist, mithin nach §. 6. 1.) Zus. der Werth des combinatorischen Integrals dann o sey. Dafs aber auch dann die Gröfse rechts Null sey, ist ebenfalls offenbar. Sollen also beide Glieder dieser Gleichung nicht o seyn, so mufs $k+l+m \geqq n$, folglich auch $k+l+m-n$ Null oder eine ganze positive Zahl seyn. Bezeichnet man nun diese mit p, so erhellet, mit Zuziehung von §. 36. 1.) Zus. die Richtigkeit der Gleichung

$$\int \frac{1}{\alpha^l \beta^l \gamma^l \delta^l \varepsilon^l \zeta^l} = \int \frac{(k+l+m)^l}{k^l\, l^l\, m^l\, n^l\, p^l}$$

$$\alpha+\delta=m,\ \beta+\varepsilon=l,\ \gamma+\zeta=k \qquad k+l+m=n+p$$
$$\alpha+\beta+\gamma=n,\ \delta+\varepsilon+\zeta=p$$

Das Integral auf der rechten Seite in dieser Gleichung ist von der Beschaffenheit wie in §. 34. 4.) Zus.; es ist nehmlich darinnen zwar *keine veränderliche Gröfse*, wohl aber eine *Bedingungsgleichung* vorhanden. Wir werden in der Folge noch auf einem andern Wege diese Gleichung erhalten.

§. 48.

Der quadrinomische Lehrsatz für Factoriellen und ganze positive Exponenten nebst verwandten Sätzen, so wie überhaupt der polynomische Lehrsatz für Factoriellen und solche Exponenten.

Auf ähnliche Art wird nun bewiesen, dafs, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl ist

$$1)\ (a+b+c+d)^{n\,1\,r} = \int \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^{\prime}}{\alpha^{\prime}\,\beta^{\prime}\,\gamma^{\prime}\,\delta^{\prime}}\, a^{\alpha\,1\,r}\, b^{\beta\,1\,r}\, c^{\gamma\,1\,r}\, d^{\delta\,1\,r}$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = n$$

seyn müsse, und diese Formel enthält den angeführten quadrinomischen Lehrsatz für Factoriellen und den Exponenten n. Dividirt man sie durch $n^{\prime}$, so erhält man nach §. 3.

$$2)\ \frac{(a+b+c+d)^{n\,1\,r}}{n^{\prime}} = \int \frac{a^{\alpha\,1\,r}\, b^{\beta\,1\,r}\, c^{\gamma\,1\,r}\, d^{\delta\,1\,r}}{\alpha^{\prime}\ \ \beta^{\prime}\ \ \gamma^{\prime}\ \ \delta^{\prime}}$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = n$$

1.) *Zusatz.* Setzt man in 2) $a = -mr$, wo m ebenfalls Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man auf ähnliche Art wie in §. 45. 8.) Zus.

$$\int \frac{(-r)^{\alpha}\, b^{\beta\,1\,r}\, c^{\gamma\,1\,r}\, d^{\delta\,1\,r}}{\alpha^{\prime}\ \beta^{\prime}\ \gamma^{\prime}\ \delta^{\prime}\ \varepsilon^{\prime}} = \frac{(b+c+d-mr)^{n\,1\,r}}{m^{\prime}\ n^{\prime}}$$
$$\alpha+\varepsilon = m,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta = n$$

2.) *Zusatz.* Setzt man hier wieder $b = -lr$, wo auch noch l Null oder eine ganze positive Zahl ist; so erhält man eben so

$$\int \frac{(-r)^{\alpha+\beta}\, c^{\gamma\,1\,r}\, d^{\delta\,1\,r}}{\alpha^{\prime}\ \beta^{\prime}\ \gamma^{\prime}\ \delta^{\prime}\ \varepsilon^{\prime}\ \zeta^{\prime}} = \frac{(c+d-lr-mr)^{n\,1\,r}}{l^{\prime}\ m^{\prime}\ n^{\prime}}$$
$$\alpha+\varepsilon = m,\ \beta+\zeta = l$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = n$$

3.) *Zusatz.* Setzt man hier wieder $c = -kr$, wo auch noch k Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man eben so

$$\int \frac{(-r)^{\alpha+\beta+\gamma}\, d^{\delta\,1\,r}}{\alpha^{\prime}\ \beta^{\prime}\ \gamma^{\prime}\ \delta^{\prime}\ \varepsilon^{\prime}\ \zeta^{\prime}\ \eta^{\prime}} = \frac{(d-kr-lr-mr)^{n\,1\,r}}{k^{\prime}\ l^{\prime}\ m^{\prime}\ n^{\prime}}$$
$$\alpha+\varepsilon = m,\ \beta+\zeta = l,\ \gamma+\eta = k$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = n$$

4.) *Zusatz.* Setzt man hier wieder $d = -ir$, wo auch noch i Null oder eine ganze positive Zahl (nicht aber die in §. 39. angeführte imaginäre Gröfse) bedeutet, so erhält man eben so

$$\int \frac{\overline{(-r)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}}{\alpha^l \beta^l \gamma^l \delta^l \varepsilon^l \zeta^l \eta^l \vartheta^l} = \frac{(-ir-kr-lr-mr)^{nlr}}{i^l\, k^l\, l^l\, m^l\, n^l}$$

$$\alpha+\varepsilon=m,\ \beta+\zeta=l,\ \gamma+\eta=k,\ \delta+\vartheta=i$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=n$$

oder, wenn man nach §. 35. 2) durch $(-r)^n$ dividirt, oder, welches einerlei ist, $r=-1$ setzt,

$$\int \frac{\overline{1}}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l\ \eta^l\ \vartheta^l} = \frac{(i+k+l+m)^{nl-1}}{i^l\ k^l\ l^l\ m^l\ n^l}$$

$$\alpha+\varepsilon=m,\ \beta+\zeta=l,\ \gamma+\eta=k,\ \delta+\vartheta=i$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=n$$

5.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in dieser Gleichung folgt $\varepsilon+\zeta+\eta+\vartheta=i+k+l+m-n$. Daraus erhellet, dafs diese Bedingungsgleichungen unauflösbar sind, sobald $i+k+l+m<n$ ist, mithin nach §. 6. 1.) Zus. der Werth des combinatorischen Integrals dann o sey. Dafs aber auch dann die Gröfse rechts o sey, ist ebenfalls klar. Sollen also beide Glieder dieser Gleichung nicht o seyn, so mufs $i+k+l+m \gtrless n$, folglich auch $i+k+l+m-n$ Null oder eine ganze positive Zahl seyn. Bezeichnet man nun diese mit p, so hat man

$$\int \frac{\overline{1}}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l\ \eta^l\ \vartheta^l} = \int \frac{\overline{(i+k+l+m)^l}}{i^l\ k^l\ l^l\ m^l\ n^l\ p^l}$$

$$\alpha+\varepsilon=m,\ \beta+\zeta=l,\ \gamma+\eta=k,\ \delta+\vartheta=i \qquad i+k+l+m=n+p$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=n,\ \varepsilon+\zeta+\eta+\vartheta=p$$

Das Integral auf der rechten Seite in dieser Gleichung ist von der Beschaffenheit wie in §. 34. 4.) Zus.; es ist nehmlich darinnen keine veränderliche Gröfse, wohl aber eine Bedingungsgleichung vorhanden. Auch diese Gleichung werden wir in der Folge auf einem andern Wege erhalten.

6.) *Zusatz.* Was in §. 45. für zwei Gröfsen a und b, in §. 47. für drei Gröfsen a, b und c, und eben jetzt für vier Gröfsen a, b, c und

d erwiesen worden ist, läfst sich eben so, für jede andere Anzahl Grössen erweisen, und so erhellet dafs allgemein

$$\frac{(a+b+c+d+\ldots)^{n\,|\,r}}{n'} = \int \frac{\overline{a^{\alpha\,|\,r}\, b^{\beta\,|\,r}\, c^{\gamma\,|\,r}\, d^{\delta\,|\,r}\ldots}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ldots} \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=n$$

seyn müsse. Diese Gleichung enthält den polynomischen Lehrsatz für Factoriellen, und den Exponenten n. Was aus dieser Gleichung wird, wenn man $a=-mr$, oder noch überdies $b=-lr$, oder noch überdies $c=-kr$ u. s. w. setzt, wo auch m, l, k u. s. w. Null oder ganze positive Zahlen bedeuten, ist ebenfalls klar, auch übersieht man das Gesetz der Formeln in §. 45. 11.) Zus. §. 47. 4.) Zus. §. 48. 5.) Zus. u. s. w. So hätte man z. B. ferner

$$\int \frac{\overline{1}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \eta'\ \vartheta'\ \iota'\ \varkappa'} = \int \frac{\overline{(h+i+k+l+m)^{l}}}{h'\ i'\ k'\ l'\ m'\ n'\ p'}$$

$\alpha+\zeta=m,\ \beta+\eta=l,\ \gamma+\vartheta=k,\ \delta+\iota=i,\ \varepsilon+\varkappa=h$ $\qquad$ $h+i+k+l+m=n+p$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=n,\ \zeta+\eta+\vartheta+\iota+\varkappa=p$

§. 49.

Ein anderer hieher gehöriger Lehrsatz.

Wenn m *und* n *Null oder ganze positive Zahlen bedeuten, so ist*

$$\int \frac{\overline{a^{\alpha+\beta\,|\,r}\, b^{\gamma+\delta\,|\,r}}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'} = \frac{(a+b)^{m+n\,|\,r}}{m'\ n'} \qquad \alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n$$

Beweis. Von der Richtigkeit dieser Formel kann man sich *erstens* auf folgende Art überzeugen. — — Das darinnen vorkommende combinatorische Integral ist nach §. 35. 6) auch

$$\int \frac{\overline{a^{\alpha\,|\,r}(a+\alpha r)^{\beta\,|\,r}\, b^{\gamma\,|\,r}(b+\gamma r)^{\delta\,|\,r}}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'} \qquad \alpha+\gamma=m,\quad \beta+\delta=n$$

oder, wenn man die veränderlichen Grösen β und δ nach §. 17. 1.) Zus. und §. 45. *wegschaft*

$$= \int \frac{a^{\alpha|r}\, b^{\gamma|r} (a+b+\alpha r+\gamma r)^{n|r}}{\alpha'\ \gamma'\ n'} \quad \alpha+\gamma=m = \int \frac{a^{\alpha|r}\, b^{\gamma|r} (a+b+mr)^{n|r}}{\alpha'\ \gamma'\ n'} \quad \alpha+\gamma=m$$

und dieses letztere combinatorische Integral ist abermals nach §. 45. und §. 35. 6)

$$= \frac{(a+b)^{m|r}\,(a+b+mr)^{n|r}}{m'\ n'} = \frac{(a+b)^{m+n|r}}{m'\ n'}$$

Eine *andere* Art sie zu erweisen wäre folgende. — — Nach §. 13. Zus. ist

$$\int \frac{a^{\alpha+\beta|r}\, b^{\gamma+\delta|r}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'} = \int \frac{a^{\varepsilon|r} b^{\zeta|r}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'}$$

$\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n$ $\qquad$ $\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n,\ \alpha+\beta=\varepsilon,\ \gamma+\delta=\zeta$

oder, wenn man die veränderlichen Grösen α, β, γ, δ nach §. 45. 11.) Zus. wegschaft, und nach §. 45 1)

$$= \int \frac{(\varepsilon+\zeta)'\, a^{\varepsilon|r}\, b^{\zeta|r}}{\varepsilon'\ \zeta'\ m'\ n'} \quad \varepsilon+\zeta=m+n = \frac{(a+b)^{m+n|r}}{m'\ n'}$$

1.) *Zusatz.* Für $r=o$ erhält man hieraus als besondern Fall

$$\int \frac{a^{\alpha+\beta}\, b^{\gamma+\delta}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'} = \frac{(a+b)^{m+n}}{m'\ n'}$$

$\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n$

2.) *Zusatz.* Setzt man aber in der Formel des Lehrsatzes $a=-1r$, wo 1 ebenfalls Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man

$$\int \frac{(-1r)^{\alpha+\beta|r}\, b^{\gamma+\delta|r}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'} = \frac{(b-1r)^{m+n|r}}{m'\ n'}$$

$\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n$

Hier verschwindet der Fàctor $(-1r)^{\alpha+\beta}1r$ des allgemeinen Gliedes allemal, sobald $\alpha+\beta>1$, oder $1-\alpha-\beta$ eine ganze negative Zahl wird. Man kann also nach §. 32. Zus. die Bedingungsgleichung $\varepsilon=1-\alpha-\beta$, oder $\alpha+\beta+\varepsilon=1$ hinzufügen, und erhält so, wenn man zugleich durch $1'$ dividirt, und nach §. 35. 2) und §. 36. 1.) Zus. die Formel:

$$\int \frac{\overline{(-r)^{\alpha+\beta}b^{\gamma+\delta}1r}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'} = \frac{\overline{(b-1r)^{m+n}1r}}{1'\,m'\,n'}$$

$\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n,\ \alpha+\beta+\varepsilon=1$

3.) *Zusatz.* Setzt man in der so eben erwiesenen Formel $b=k$, wo k ebenfalls Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, und $r=-1$, so erhält man

$$\int \frac{\overline{k^{\gamma+\delta}1-1}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'} = \frac{(k+1)^{m+n}1-1}{1'\,m'\,n'}$$

$\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n,\ \alpha+\beta+\varepsilon=1$

Hier verschwindet wieder das allgemeine Glied, sobald $\gamma+\delta>k$, oder $k-\gamma-\delta$ eine ganze negative Zahl ist. Man kann also wieder nach §. 32. Zus. die Bedingungsgleichung $\zeta=k-\gamma-\delta$, oder $\gamma+\delta+\zeta=k$ hinzufügen, und erhält so, wenn man zugleich durch k' dividirt, und nach §. 36. 1.) Zus. die Formel:

$$\int \frac{\overline{1}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,\zeta'} = \frac{(k+1)^{m+n}1-1}{k'\,1'\,m'\,n'}$$

$\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n,\ \alpha+\beta+\varepsilon=1,\ \gamma+\delta+\zeta=k$

4.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in voriger Gleichung ergiebt sich sogleich die Gleichung $\varepsilon+\zeta=k+1-m-n$. Daraus erhellet, dafs diese Bedingungsgleichungen unauflösbar sind, sobald $k+1<m+n$ ist, und dafs mithin nach §. 6. 1.) Zus. der Werth des combinatorischen Integrals dann $=0$ ist. Dafs aber auch dann die Gröfse rechts 0 sey, ist ebenfalls offenbar. Sollen also beide Glieder dieser Gleichung nicht Null seyn, so mufs $k+1\geqq m+n$, folglich auch $k+1-m-n$ Null oder eine ganze positive Zahl seyn. Bezeichnet

man nun diese mit p, so erhellet mit Zuziehung von §. 36. 1.) Zus. die Richtigkeit der Gleichung

$$\int \frac{1}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l} = \int \frac{(k+l)^l}{k^l\ l^l\ m^l\ n^l\ p^l}$$

$$\alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=n,\ \varepsilon+\zeta=p \qquad k+l=m+n+p$$
$$\alpha+\beta+\varepsilon=l,\ \gamma+\delta+\zeta=k$$

Dies ist aber die nehmliche Gleichung, die wir schon früher in §. 47. 4.) Zus. aus andern Gründen abgeleitet hatten.

5.) *Zusatz.* Was in der Formel des Lehrsatzes für *zwei* Gröfsen a und b erwiesen worden, läfst sich nun eben so für drei erweisen, und so hat man die Formel:

$$1)\quad \int \frac{a^{\alpha+\beta\,|\,r}\ b^{\gamma+\delta\,|\,r}\ c^{\varepsilon+\zeta\,|\,r}}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l} = \frac{(a+b+c)^{m+n\,|\,r}}{m^l\ n^l}$$

$$\alpha+\gamma+\varepsilon=m,\ \beta+\delta+\zeta=n$$

Setzt man hier $a=-1\,r$, so erhält man, daferne auch 1 Null, oder eine ganze positive Zahl ist,

$$2)\quad \int \frac{(-r)^{\alpha+\beta}\ b^{\gamma+\delta\,|\,r}\ c^{\varepsilon+\zeta\,|\,r}}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l\ \varkappa^l} = \frac{(b+c-1\,r)^{m+u\,|\,r}}{l^l\ m^l\ n^l}$$

$$\alpha+\gamma+\varepsilon=m,\ \beta+\delta+\zeta=n,\ \alpha+\beta+\varkappa=l$$

Setzt man hier noch überdies $b=-k\,r$, wo auch k Null oder eine ganze positive Zahl ist, so erhält man

$$3)\quad \int \frac{(-r)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\ c^{\varepsilon+\zeta\,|\,r}}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l\ \varkappa^l\ \vartheta^l} = \frac{(c-k\,r-l\,r)^{m+u\,|\,r}}{k^l\ l^l\ m^l\ n^l}$$

$$\alpha+\gamma+\varepsilon=m,\ \beta+\delta+\zeta=n,\ \alpha+\beta+\varkappa=l$$
$$\gamma+\delta+\vartheta=k$$

Setzt man noch überdies $c=i$, wo auch i Null oder eine ganze positive Zahl ist, und $r=-1$, so erhält man, wenn man zugleich durch i^l dividirt

4) $$\int \frac{1}{\alpha^l \beta^l \gamma^l \delta^l \varepsilon^l \zeta^l \eta^l \vartheta^l \iota^l} = \frac{(i+k+l)^{m+n\,l-1}}{i^l\, k^l\, l^l\, m^l\, n^l}$$

$$\alpha+\gamma+\varepsilon = m,\ \beta+\delta+\zeta = n,\ \alpha+\beta+\eta = l$$
$$\gamma+\delta+\vartheta = k,\ \varepsilon+\zeta+\iota = i$$

Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in dieser Gleichung folgt $\eta+\vartheta+\iota = i+k+l-m-n$. Bezeichnet man diese ganze nicht negative Zahl durch p, so erhält man

5) $$\int \frac{1}{\alpha^l \beta^l \gamma^l \delta^l \varepsilon^l \zeta^l \eta^l \vartheta^l \iota^l} = \int \frac{(i+k+l)^l}{i^l\, k^l\, l^l\, m^l\, n^l\, p^l}$$

$$\alpha+\gamma+\varepsilon = m,\ \beta+\delta+\zeta = n,\ \eta+\vartheta+\iota = p \qquad m+n+p = i+k+l$$
$$\alpha+\beta+\eta = l,\ \gamma+\delta+\vartheta = k,\ \varepsilon+\zeta+\iota = i$$

6.) *Zusatz.* Auf die nehmliche Art kann man nun auch leicht einsehen, dafs, wenn l, m und n Null oder ganze positive Zahlen bedeuten

1) $$\int \frac{a^{\alpha+\beta+\gamma\,l\,r}\, b^{\delta+\varepsilon+\zeta\,l\,r}}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l} = \frac{(a+b)^{l+m+n\,l\,r}}{l^l\ m^l\ n^l}$$

$$\alpha+\delta = l,\ \beta+\varepsilon = m,\ \gamma+\zeta = n$$

seyn müsse. — — Setzt man hier $a = -k\,r$, so erhält man

2) $$\int \frac{(-r)^{\alpha+\beta+\gamma}\, b^{\delta+\varepsilon+\zeta\,l\,r}}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l\ \eta^l} = \frac{(b-k\,r)^{l+m+n\,l\,r}}{k^l\ l^l\ m^l\ n^l}$$

$$\alpha+\delta = l,\ \beta+\varepsilon = m,\ \gamma+\zeta = n$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\eta = k$$

Setzt man hier wieder $b = i$, und $r = -1$, so erhält man

3) $$\int \frac{1}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l\ \delta^l\ \varepsilon^l\ \zeta^l\ \eta^l\ \vartheta^l} = \frac{(i+k)^{l+m+n\,l-1}}{i^l\ k^l\ l^l\ m^l\ n^l}$$

$$\alpha+\delta = l,\ \beta+\varepsilon = m,\ \gamma+\zeta = n$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\eta = k,\ \delta+\varepsilon+\zeta+\vartheta = i$$

Hier ist wieder nach den Bedingungsgleichungen $\eta+\vartheta = i+k-l-m-n$. Bezeichnet man diese ganze nicht negative Zahl durch p, so erhält man

4) $$\int \frac{1}{\alpha' \beta' \gamma' \delta' \varepsilon' \zeta' \eta' \vartheta'} = \int \frac{(i+k)'}{i' k' l' m' n' p'}$$

$\alpha+\delta=l$, $\beta+\varepsilon=m$, $\gamma+\zeta=n$, $\eta+\vartheta=p$ $\quad$ $i+k=l+m+n+p$

$\alpha+\beta+\gamma+\eta=k$, $\delta+\varepsilon+\zeta+\vartheta=i$

welche Gleichung wir schon oben aus andern Gründen abgeleitet hatten.

7.) *Zusatz.* Das allgemeine, was den Formeln, welche kein r, und auf der einen Seite ein combinatorisches Integral mit gar keiner veränderlichen Gröfse enthalten, zum Grunde liegt, läfst sich so übersehen:

A) Die veränderlichen Gröfsen des einen combinatorischen Integrals darinnen, bilden ein Rechteck.

B) Die Bedingungsgleichungen dieses Integrals erhält man, wenn man die Summen aller Horizontal- und auch aller Vertikal-Reihen dieses Rechtecks unveränderlich setzt.

C) Das allgemeine Glied dieses Integrals ist ein Bruch, dessen Zähler 1, der Nenner aber ein Product aus allen veränderlichen Gröfsen ist, nachdem man ihnen oben zur Rechten einen Strich angehängt hat.

D) Die Bedingungsgleichung des andern Integrals, welches gar keine veränderliche Gröfse enthält, erhält man, wenn man die Summe der bekannten Summen der *Horizontal*-Reihen des vorigen Rechtecks der der *Vertikal*-Reihen gleich setzt.

E) Der *Zähler* des zugehörigen allgemeinen Gliedes findet sich, wenn man gedachter Summe der Summen oben einen Strich zur Rechten anhängt.

F) Der *Nenner* aber, wenn man die bekannten Summen der Horizontal- und Vertikal-Reihen des erwähnten Rechtecks oben zur Rechten mit einen Strich versieht, und dann multiplicirt.

Beispiel. Das Rechteck veränderlicher Gröfsen

α, β, γ, δ

ε, ζ, η, ϑ

ι, $\varkappa$, λ, μ

giebt die Gleichung

$$\int \frac{1}{\alpha' \beta' \gamma' \delta' \varepsilon' \zeta' \varkappa' \vartheta' \iota' \varkappa' \lambda' \mu'} =$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=i,\ \varepsilon+\zeta+\varkappa+\vartheta=k,\ \iota+\varkappa+\lambda+\mu=l$$

$$\alpha+\varepsilon+\iota=m,\ \beta+\zeta+\varkappa=n,\ \gamma+\varkappa+\lambda=p,\ \delta+\vartheta+\mu=q$$

$$\int \frac{(i+k+l)'}{i'\ k'\ l'\ m'\ n'\ p'\ q'}$$

$$i+k+l=m+n+p+q$$

8.) *Zusatz.* Das allgemeine, was den Formeln, welche keine Potenz von $-r$ enthalten, zum Grunde liegt, läfst sich ebenfalls aus einem Rechtecke veränderlicher Gröfsen ableiten. So gäbe z. B. das Rechteck im vorigen Zusatze die Gleichung:

$$\int \frac{a^{\alpha+\varepsilon+\iota}\,lr\ b^{\beta+\zeta+\varkappa}\,lr\ c^{\gamma+\varkappa+\lambda}\,lr\ d^{\delta+\vartheta+\mu}\,lr}{\alpha'\ \varepsilon'\ \iota'\ \beta'\ \zeta'\ \varkappa'\ \gamma'\ \varkappa'\ \lambda'\ \delta'\ \vartheta'\ \mu'} =$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=l,\ \varepsilon+\zeta+\varkappa+\vartheta=m,\ \iota+\varkappa+\lambda+\mu=n$$

$$\frac{(a+b+c+d)^{l+m+n\,lr}}{l'\ m'\ n'}$$

9.) *Zusatz.* Das allgemeine was den Formeln, welche Potenzen von $-r$ enthalten, zum Grunde liegt, läfst sich aus einem Rechtecke veränderlicher Gröfsen, dem aber unten eine unvollendete Horizontalreihe angehängt ist, ableiten. So gäbe z. B. das Schema veränderlicher Gröfsen

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \\ \varepsilon, & \zeta, & \varkappa, & \vartheta \\ \iota, & \varkappa, & \lambda, & \mu \\ \varkappa, & \xi & & \end{array}$$

die Gleichung

$$\int \frac{(-r)^{\alpha+\varepsilon+\iota+\beta+\zeta+\varkappa}\ c^{\gamma+\varkappa+\lambda}\,lr\ d^{\delta+\vartheta+\mu}\,lr}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \varkappa'\ \vartheta'\ \iota'\ \varkappa'\ \lambda'\ \mu'\ \varkappa'\ \xi'} =$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=l,\ \varepsilon+\zeta+\varkappa+\vartheta=m,\ \iota+\varkappa+\lambda+\mu=n$$

$$\alpha+\varepsilon+\iota+\varkappa=i,\ \beta+\zeta+\varkappa+\xi=k$$

$$\frac{(c+d-ir-kr)^{l+m+n\,lr}}{i'\ k'\ l'\ m'\ n'}$$

§. 50.

Lehrsatz.

Wenn n *Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist*

$$\int \overline{a^{\alpha|r}(b+r+\alpha r)^{\beta|r}}_{\alpha+\beta=n-1} = \frac{a^{n|r}-b^{n|r}}{a-b}$$

Beweis. Nach §. 26. ist

$$\int \overline{a^{\alpha|r}(b+\alpha r)^{\beta|r}}_{\alpha+\beta=n} =$$

$$\int \overline{a^{\alpha+1|r}(b+r+\alpha r)^{\beta|r}}_{\alpha+\beta=n-1} + b^{n|r} = \int \overline{a^{\alpha|r}(b+\alpha r)^{\beta+1|r}}_{\alpha+\beta=n-1} + a^{n|r}$$

Nun ist nach §. 35. 4) und 5) $a^{\alpha+1|r} = a^{\alpha|r}(a+\alpha r)$, und $(b+\alpha r)^{\beta+1|r} = (b+\alpha r)\,(b+r+\alpha r)^{\beta|r}$, man hat also auch

$$\int \overline{a^{\alpha|r}(a+\alpha r)(b+r+\alpha r)^{\beta|r}}_{\alpha+\beta=n-1} + b^{n|r} =$$

$$\int \overline{a^{\alpha|r}(b+\alpha r)\,(b+r+\alpha r)^{\beta|r}}_{\alpha+\beta=n-1} + a^{n|r}$$

Hieraus folgt nach §. 3.

$$(a-b)\int \overline{a^{\alpha|r}(b+r+\alpha r)^{\beta|r}}_{\alpha+\beta=n-1} = a^{n|r}-b^{n|r}$$

und daraus leicht das zu beweisende.

1.) *Zusatz.* Setzt man $b-(n-1)r$ statt b, so erhält man nach §. 35. 1)

$$\int \overline{a^{\alpha|r}b^{\beta|-r}}_{\alpha+\beta=n-1} = \frac{a^{n|r}-b^{n|-r}}{a-b+(n-1)r}$$

2.) *Zusatz.* Setzt man $a=b+mr$, wo m eine *ganze* positive oder negative Zahl bedeuten mag, so erhält man

$$\int \overline{(b+mr)^{\alpha|r}(b+r+\alpha r)^{\beta|r}}_{\alpha+\beta=n-1} = \frac{(b+mr)^{n|r}-b^{n|r}}{mr}$$

Nun ist nach §. 35. 6)

$$(b+mr)^{\alpha\,1\,r} = (b+mr)^{\alpha+1-m\,1\,r}\,(b+r+\alpha r)^{m-1\,1\,r}$$

$$(b+mr)^{\alpha+1-m\,1\,r}\,(b+r+\alpha r)^{\beta\,1\,r} = (b+mr)^{\alpha+\beta+1-m\,1\,r}$$

$$(b+mr)^{n-m\,1\,r}\,(b+nr)^{m\,1\,r} = (b+mr)^{n\,1\,r}$$

$$b^{m\,1\,r}\,(b+mr)^{n-m\,1\,r} = b^{n\,1\,r}$$

Dividirt man also vorige Formel durch $(b+mr)^{n-m\,1\,r}$, so erhält man

$$1)\quad \int_{\alpha+\beta=n-1} \overline{(b+r+\alpha r)^{m-1\,1\,r}} = \frac{(b+nr)^{m\,1\,r}-b^{m\,1\,r}}{mr}$$

und wenn man hier $-r$ statt r setzt

$$2)\quad \int_{\alpha+\beta=n-1} \overline{(b-r-\alpha r)^{m-1\,1-r}} = \frac{b^{m\,1-r}-(b-nr)^{m\,1-r}}{mr}$$

Setzt man aber in der ersten von diesen Formeln $b-nr$, in der andern $b+nr$ statt b, so erhält man

$$3)\quad \int_{\alpha+\beta=n-1} \overline{(b-\beta r)^{m-1\,1\,r}} = \frac{b^{m\,1\,r}-(b-nr)^{m\,1\,r}}{mr}$$

$$4)\quad \int_{\alpha+\beta=n-1} \overline{(b+\beta r)^{m-1\,1-r}} = \frac{(b+nr)^{m\,1-r}-b^{m\,1-r}}{mr}$$

Setzte man in den Formeln 1) und 3) $b-mr+r$ statt b, so erhielte man nach §. 35. 1) ebenfalls die Formeln 4) und 2), nur mit verwechseltem α und β.

Diese vier Formeln gelten für jeden *ganzen* Werth von m. Nur für den Fall $m=0$, wo die Integrale Summen harmonischer Reihen sind, hat die Bestimmung der rechts stehenden Brüche eine Schwierigkeit, weil Zähler und Nenner zugleich Null wird. Diese Schwierigkeit zu heben, ist hier nicht der Ort.

§. 51.

Lehrsatz.

Es ist allemal

$$\int \frac{c^{\alpha\,l\,r}\; c^{\beta\,l\,r}\; a^{\alpha}\; b^{\beta}}{\alpha'\;\beta'} = \int \frac{c^{\alpha+\beta\,l\,r}}{\alpha'\;\beta'} (a+b)^{\alpha}\,(a\,b)^{\beta}\,(-r)^{\beta}$$

$$\alpha+\beta=n \qquad\qquad \alpha+2\beta=n$$

Beweis. Das combinatorische Integral

$$\int \frac{(-r)^{\gamma}\; c^{\gamma+\delta+\varepsilon\,l\,r}\; a^{\gamma+\delta}\; b^{\gamma+\varepsilon}}{\gamma'\;\delta'\;\varepsilon'}$$

$$2\gamma+\delta+\varepsilon=n$$

ist nach §. 13. Zus. und §. 9. auch gleich dem combinatorischen Integrale

$$\int \frac{(-r)^{\gamma}\; c^{\gamma+\delta+\varepsilon\,l\,r}\; a^{\alpha}\; b^{\beta}}{\gamma'\;\delta'\;\varepsilon'}$$

$$\gamma+\delta=\alpha,\ \gamma+\varepsilon=\beta,\ \alpha+\beta=n$$

oder, wenn man die veränderlichen Grölsen γ, δ, ε nach §. 45. 9.) Zus. wegschaft

$$\int \frac{c^{\alpha\,l\,r}\; c^{\beta\,l\,r}\; a^{\alpha}\; b^{\beta}}{\alpha'\;\beta'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

Es ist aber auch das nehmliche combinatorische Integral zu Anfange des Beweises nach §. 13. und §. 9. auch gleich dem combinatorischen Integrale

$$\int \frac{(-r)^{\gamma}\; c^{\gamma+\zeta\,l\,r}\; (a\,b)^{\gamma}\; a^{\delta}\; b^{\varepsilon}}{\gamma'\;\delta'\;\varepsilon'}$$

$$\delta+\varepsilon=\zeta,\ 2\gamma+\zeta=n$$

oder, wenn man die veränderlichen Grölsen δ, ε nach §. 38. 1) wegschaft, und nach §. 2. 2.) Zus.

$$\int \frac{(-r)^{\gamma}\; c^{\gamma+\zeta\,l\,r}\; (a\,b)^{\gamma}\,(a+b)^{\zeta}}{\gamma'\;\zeta'} = \int \frac{(-r)^{\beta}\; c^{\alpha+\beta\,l\,r}\; (a\,b)^{\beta}\; (a+b)^{\alpha}}{\alpha'\;\beta'}$$

$$2\gamma+\zeta=n \qquad\qquad \alpha+2\beta=n$$

§. 52.

Lehrsatz.

Es ist allemal

$$\int_{\alpha+\beta=n} (-1)^{\alpha} \frac{\overline{c^{\alpha}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{\alpha'\,\beta'} = \int_{2\beta=n} \frac{\overline{c^{\beta}|r}}{\beta'} r^{\beta}$$

Beweis. Setzt man in der Formel des vorigen §. $a = -1$ und $b = 1$, so erhält man

$$\int_{\alpha+\beta=n} (-1)^{\alpha} \frac{\overline{c^{\alpha}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{\alpha'\,\beta'} = \int_{\alpha+2\beta=n} \frac{\overline{c^{\alpha+\beta}|r}}{\alpha'\,\beta'} 0^{\alpha} r^{\beta}$$

Bei dem Integrale rechts verschwindet das allgemeine Glied allemal, wenn α eine ganze positive Zahl ist, und behält nur dann einen Werth, wenn $\alpha = 0$ ist. Es ist mithin nach §. 26. 2.) Zus. gedachtes Integral auch

$$\int_{2\beta=n} \frac{\overline{c^{\beta}|r}}{\beta'} r^{\beta}$$

1.) *Zusatz.* Nimmt man für n Null oder eine ganze positive Zahl an, und unterscheidet man gerade und ungerade Werthe von n, so findet sich

1) $\int_{\alpha+\beta=2n} (-1)^{\alpha} \frac{\overline{c^{\alpha}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{\overline{c^{n}|r}}{n'} \cdot r^{n}$ 2) $\int_{\alpha+\beta=2n+1} (-1)^{\alpha} \frac{\overline{c^{\alpha}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{\alpha'\,\beta'} = 0$

2.) *Zusatz.* Nach §. 45. 2) ist auch

$$\int_{\alpha+\beta=2n} \frac{\overline{c^{\alpha}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{\overline{(2c)^{2n}|r}}{(2n)'}$$

Addirt man zu dieser Formel die Formel 1) des vorigen Zusatzes, oder subtrahirt man sie davon, so erhält man

$$\int^{\alpha+\beta=2n} (1+(-1)^\alpha)\,\frac{c^{\alpha\,1\,r}\,c^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\;\beta'} = \frac{(2c)^{2n\,1\,r}}{(2n)'} + \frac{c^{n\,1\,r}}{n'}\cdot r^n,$$

$$\int^{\alpha+\beta=2n} (1-(-1)^\alpha)\,\frac{c^{\alpha\,1\,r}\,c^{\beta\,1\,r}}{\alpha'\;\beta'} = \frac{(2c)^{2n\,1\,r}}{(2n)'} - \frac{c^{n\,1\,r}}{n'}\cdot r^n$$

Allein bei dem combinatorischen Integrale in der *ersten* Gleichung verschwindet das allgemeine Glied, wenn α *ungerade*, bei dem in der *andern* hingegen, wenn α *gerade* ist; man hat also hieraus nach §. 19. Zus.

$$\int_2^{2\alpha+\beta=2n} \frac{c^{2\alpha\,1\,r}\,c^{\beta\,1\,r}}{(2\alpha)'\;\beta'} = \frac{(2c)^{2n\,1\,r}}{(2n)'} + \frac{c^{n\,1\,r}}{n'}\cdot r^n,$$

$$\int_2^{2\alpha+\beta=2n-1} \frac{c^{2\alpha+1\,1\,r}\,c^{\beta\,1\,r}}{(2\alpha+1)'\;\beta'} = \frac{(2c)^{2n\,1\,r}}{(2n)'} - \frac{c^{n\,1\,r}}{n'}\cdot r^n$$

Allein nach der Bedingungsgleichung des combinatorischen Integrals in der *ersten* Gleichung muſs nothwendig β *gerade*, in der *zweiten* hingegen *ungerade* seyn. Man hat also auch nach §. 19. Zus.

$$\int_2^{\alpha+\beta=n} \frac{c^{2\alpha\,1\,r}\,c^{2\beta\,1\,r}}{(2\alpha)'\;(2\beta)'} = \frac{(2c)^{2n\,1\,r}}{(2n)'} + \frac{c^{n\,1\,r}}{n'}\cdot r^n,$$

$$\int_2^{\alpha+\beta=n-1} \frac{c^{2\alpha+1\,1\,r}\,c^{2\beta+1\,1\,r}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta+1)'} = \frac{(2c)^{2n\,1\,r}}{(2n)'} - \frac{c^{n\,1\,r}}{n'}\cdot r^n$$

oder, wenn man halbirt

$$1)\quad \int^{\alpha+\beta=n} \frac{\overline{c^{2\alpha}|r}\,\overline{c^{2\beta}|r}}{(2\alpha)'\,(2\beta)'} = \frac{(2c)^{2n}|r}{2\,(2n)'} + \frac{c^{n}|r}{2\,n'}\cdot r^{n},$$

$$2)\quad \int^{\alpha+\beta=n-1} \frac{\overline{c^{2\alpha+1}|r}\,\overline{c^{2\beta+1}|r}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta+1)'} = \frac{(2c)^{2n}|r}{2\,(2n)'} - \frac{c^{n}|r}{2\,n'}\cdot r^{n}$$

3.) *Zusatz.* Nach §. 45, 2) ist auch

$$\int^{\alpha+\beta=2n+1} \frac{\overline{c^{\alpha}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(2c)^{2n+1}|r}{(2n+1)'}$$

oder, welches nach §. 19. einerlei ist

$$\int^{2\alpha+\beta=2n+1} \frac{\overline{c^{2\alpha}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{(2\alpha)'\,\beta'} + \int^{2\alpha+\beta=2n} \frac{\overline{c^{2\alpha+1}|r}\,\overline{c^{\beta}|r}}{(2\alpha+1)'\,\beta'} = \frac{(2c)^{2n+1}|r}{(2n+1)'}$$

Allein in der Bedingungsgleichung des *ersten* von diesen beiden combinatorischen Integralen muſs β nothwendig *ungerade*, in der des *andern* hingegen nothwendig *gerade* seyn. Man hat also auch nach §. 19. Zus.

$$\int^{\alpha+\beta=n} \frac{\overline{c^{2\alpha}|r}\,\overline{c^{2\beta+1}|r}}{(2\alpha)'\,(2\beta+1)'} + \int^{\alpha+\beta=n} \frac{\overline{c^{2\alpha+1}|r}\,\overline{c^{2\beta}|r}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta)'} = \frac{(2c)^{2n+1}|r}{(2n+1)'}$$

Nun sind diese beiden combinatorischen Integrale nach §. 2. 2.) Zus. einander gleich, und demnach ist auch

$$\int^{\alpha+\beta=n} \frac{\overline{c^{2\alpha}|r}\,\overline{c^{2\beta+1}|r}}{(2\alpha)'\,(2\beta+1)'} = \int^{\alpha+\beta=n} \frac{\overline{c^{2\alpha+1}|r}\,\overline{c^{2\beta}|r}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta)'} = \frac{(2c)^{2n+1}|r}{2\,(2n+1)'}$$

4.) *Zusatz.* Man setze in der Formel des Lehrsatzes $c=m$, $r=-1$, wo m Null oder eine ganze positive Zahl ist, so erhält man

$$\int^{\alpha+\beta=n} \overline{(-1)^{\alpha} \frac{m^{\alpha l-1}\, m^{\beta l-1}}{\alpha'\ \beta'}} = \int^{2\beta=n} \overline{(-1)^{\beta} \frac{m^{\beta l-1}}{\beta'}}$$

Allein das allgemeine Glied des combinatorischen Integrals *links* verschwindet, sobald α oder β nicht kleiner als $m+1$ ist. Man kann also nach §. 28. 2.) Zus. die Bedingungsgleichungen $\alpha+\gamma=m$, $\beta+\delta=m$ hinzufügen. Eben so verschwindet das combinatorische Integral *rechts*, sobald β nicht kleiner als $m+1$ ist. Man kann also auch da die Bedingungsgleichung $\beta+\gamma=m$ hinzufügen, und so erhält man

$$\int^{\alpha+\beta=n,\ \alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=m} \overline{(-1)^{\alpha} \frac{(\alpha+\gamma)^{\alpha l-1}(\beta+\delta)^{\beta l-1}}{\alpha'\ \beta'}} = \int^{2\beta=n,\ \beta+\gamma=m} \overline{(-1)^{\beta} \frac{(\beta+\gamma)^{\beta l-1}}{\beta'}}$$

oder, wenn man durch m' m' nach §. 36. 1.) Zus. dividirt

$$\int^{\alpha+\beta=n,\ \alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=m} \overline{\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'}} = \int^{2\beta=n,\ \beta+\gamma=m} \overline{\frac{(-1)^{\beta}}{\beta'\,\gamma'\,(\beta+\gamma)'}}$$

5.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen des auf der *linken* Seite in voriger Gleichung befindlichen combinatorischen Integrals folgt auch $\gamma+\delta=2m-n$. Daraus erhellet, dafs, wenn $2m \prec n$, gedachte Bedingungsgleichungen unauflösbar sind, mithin der Werth dieses Integrals nach §. 6. 1.) Zus. $=0$ ist. Aber auch aus den Bedingungsgleichungen des auf der *rechten* Seite befindlichen combinatorischen Integrals folgt, $2\gamma=2m-n$, woraus sich eben so ergiebt, dafs, wenn $2m \prec n$, dieses Integral Null seyn müsse. Sollen also beide Integrale nicht Null seyn, so mufs $2m \succcurlyeq n$, also $2m-n$ Null oder eine ganze positive Zahl seyn. Bezeichnet man diese mit p, so erhält man

$$\int^{\substack{\alpha+\beta=n,\ \gamma+\delta=p \\ \alpha+\gamma=m,\ \beta+\delta=m}} \overline{\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'}} = \int^{\substack{2\beta=n,\ 2\gamma=p \\ \beta+\gamma=m}} \overline{\frac{(-1)^{\beta}}{\beta'\,\gamma'\,(\beta+\gamma)'}}$$

Aus den Bedingungsgleichungen beider combinatorischer Integrale folgt die Relation zwischen unveränderlichen Gröfsen $2m = n + p$, welche also statt finden mufs, wenn sie nicht beide zugleich Null seyn sollen; beide Integrale sind also von der Beschaffenheit, wie in §. 6. 3.) Zus. angegeben worden.

§. 53.

Lehrsatz.

Wenn m *Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist*

$$1)\quad \int \frac{e^{\alpha l 2r}(-r)^{\beta}}{(2\alpha)^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}} = \frac{(e-2mr+r)^{ml2r}}{(2m)^{l}} \qquad \alpha+\beta=m$$

$$2)\quad \int \frac{(e+r)^{\alpha l 2r}(-r)^{\beta}}{(2\alpha+1)^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}} = \frac{(e-2mr)^{ml2r}}{(2m+1)^{l}} \qquad \alpha+\beta=m$$

Beweis. Man setze in der Formel 2) zu §. 45. 2r, m statt r, n, und statt a, b erst e, $r-2mr$, dann $e+r$, $-r-2mr$, so erhält man, mit Zuziehung von §. 35. 2)

$$\int \frac{e^{\alpha l 2r}(r-2mr)^{\beta l 2r}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \int \frac{e^{\alpha l 2r}(-r)^{\beta}(2m-1)^{\beta l -2}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \frac{(e+r-2mr)^{ml2r}}{m^{l}} \qquad \alpha+\beta=m$$

$$\int \frac{(e+r)^{\alpha l 2r}(-r-2mr)^{\beta l 2r}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \int \frac{(e+r)^{\alpha l 2r}(-r)^{\beta}(2m+1)^{\beta l -2}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}} = \frac{(e-2mr)^{ml2r}}{m^{l}} \qquad \alpha+\beta=m$$

Nun ist nach §. 35. 6) und der Bedingungsgleichung

$$(2m-1)^{ml-2} : (2m-1)^{\beta l-2} = (2m-1-2\beta)^{m-\beta l-2} = (2\alpha-1)^{\alpha l-2}$$

$$(2m+1)^{m+1l-2} : (2m+1)^{\beta l-2} = (2m+1-2\beta)^{m-\beta+1 l-2} = (2\alpha+1)^{\alpha+1 l-2}$$

Dividirt man also von vorigen Gleichungen die erste durch $(2m-1)^{ml-2}$, und die andere durch $(2m+1)^{m+1l-2}$, so erhält man

$$\int \frac{e^{\alpha l 2r}(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\beta^{l}(2\alpha-1)^{\alpha l-2}} = \frac{(e-2mr+r)^{ml 2r}}{m^{l}(2m-1)^{ml-2}}$$

$$\alpha+\beta=m$$

$$\int \frac{(e+r)^{\alpha l 2r}(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\beta^{l}(2\alpha+1)^{\alpha+1 l-2}} = \frac{(e-2mr)^{ml 2r}}{m^{l}(2m+1)^{m+1 l-2}}$$

$$\alpha+\beta=m$$

Nun ist aber auch

nach §. 35. 2) $2^{m}.m^{l} = 2^{m}.m^{ml-1} = (2m)^{ml-2}$

nach §. 35. 8) $(2m)^{ml-2}(2m-1)^{ml-2} = (2m)^{2ml-1} = (2m)^{l}$

nach §. 35. 9) $(2m+1)^{m+1l-2}(2m)^{ml-2} = (2m+1)^{2m+1l-1} = (2m+1)^{l}$

also auch

(⊙) $2^{m}.m^{l}(2m-1)^{ml-2} = (2m)^{l}$, und eben so $2^{\alpha}.\alpha^{l}(2\alpha-1)^{\alpha l-2} = (2\alpha)^{l}$

(☽) $(2m+1)^{m+1l-2}\,2^{m}.m^{l} = (2m+1)^{l}$, und eben so

$(2\alpha+1)^{\alpha+1l-2}\,2^{\alpha}.\alpha^{l} = (2\alpha+1)^{l}$

Dividirt man also beide vorige Formeln noch durch 2^{m}, so erhält man das zu beweisende.

1.) *Zusatz.* Setzt man in den erwiesenen Formeln $r=-1$, und, daferne auch k eine ganze nicht negative Zahl bedeutet, in der ersten $e=2k$, in der andern $e=2k+1$, so erhält man, mit Zuziehung von §. 35. 2)

$$\int \frac{(2k)^{\alpha l-2}}{(2\alpha)^{l}\beta^{l}2^{\beta}} = \int \frac{2^{\alpha}k^{\alpha l-1}}{(2\alpha)^{l}\beta^{l}2^{\beta}} = \frac{(2k+2m-1)^{ml-2}}{(2m)^{l}}$$

$$\alpha+\beta=m \qquad \alpha+\beta=m$$

$$\int \frac{(2k)^{\alpha l-2}}{(2\alpha+1)'\beta' 2^{\beta}} = \int \frac{2^{\alpha} k^{\alpha l-1}}{(2\alpha+1)'\beta' 2^{\beta}} = \frac{(2k+2m+1)^{ml-2}}{(2m+1)'}$$
$$\alpha+\beta=m \qquad \alpha+\beta=m$$

Da aber die allgemeinen Glieder der combinatorischen Integrale verschwinden, sobald $\alpha > k+1$ ist, so kann man nach §. 28. 2.) Zus. die Bedingungsgleichung $\alpha+\gamma=k$ beiderseits hinzufügen, und erhält so, mit Zuziehung von §. 55. 6)

$$\int \frac{2^{\alpha}(\alpha+\gamma)^{\alpha l-1}}{(2\alpha)'\beta' 2^{\beta}} = \frac{(2k+2m-1)^{k+ml-2}}{(2m)'(2k-1)^{kl-2}},$$
$$\alpha+\beta=m \quad \alpha+\gamma=k$$

$$\int \frac{2^{\alpha}(\alpha+\gamma)^{\alpha l-1}}{(2\alpha+1)'\beta' 2^{\beta}} = \frac{(2k+2m+1)^{k+m+1 l-2}}{(2m+1)'(2k+1)^{k+1 l-2}}.$$
$$\alpha+\beta=m \quad \alpha+\gamma=k$$

Multiplicirt man nun von diesen Gleichungen
die erste mit $2^m : k' = 2^{k+m}(k+m)' : 2^k (k+m)' k'$
die andere mit $2^{m+1} : k' = 2^{k+m+1}(k+m+1)' : 2^k (k+m+1)' k'$
so erhält man mit Zuziehung voriger im Beweis vorkommender Formeln (⊙) und (◑)

1) $$\int \frac{2^{2\alpha}}{(2\alpha)'\beta'\gamma'} = \frac{(2k+2m)'}{(2m)'(k+m)'(2k)'}$$
$$\alpha+\beta=m \quad \alpha+\gamma=k$$

2) $$\int \frac{2^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'\beta'\gamma'} = \frac{(2k+2m+2)'}{(2m+1)'(k+m+1)'(2k+1)'}$$
$$\alpha+\beta=m \quad \alpha+\gamma=k$$

2.) *Zusatz.* Nach §. 19. Zus. kann man die beiden Formeln des Lehrsatzes auch so ausdrücken

$$\int_{\substack{\alpha+2\beta=2m}} \frac{e^{\alpha:2\,|\,2r}\,(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} = \frac{(e-2mr+r)^{m\,|\,2r}}{(2m)'},$$

$$\int_{\substack{\alpha+2\beta=2m+1}} \frac{(e+r)^{(\alpha-1):2\,|\,2r}\,(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} = \frac{(e-2mr)^{m\,|\,2r}}{(2m+1)'}$$

Es ist derowegen auch

1) $$\int_{\substack{\alpha+2\beta=n}} \frac{e^{\alpha:2\,|\,2r}\,(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} = \frac{(e-nr+r)^{n:2\,|\,2r}}{n'},$$ wenn n gerade ist

2) $$\int_{\substack{\alpha+2\beta=n}} \frac{(e+r)^{(\alpha-1):2\,|\,2r}\,(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} = \frac{(e-nr+r)^{(n-1):2\,|\,2r}}{n'},$$ wenn n ungerade ist

Nähme man Factoriellen mit gebrochenen Exponenten an, und behandelte sie nach dem Satze §. 35. 6); so würde durch Multiplication der Formel 2) mit $e^{\frac{1}{2}\,|\,2r}$ die Formel 1) entstehen, also jede für ein gerades sowohl als ungerades n gelten.

3.) *Zusatz.* Nach §. 19. Zus. kann man die beiden Formeln des 1.) Zusatzes auch so darstellen

$$\int_{\substack{\alpha+2\beta=2m\\ \alpha+2\gamma=2k}} \frac{2^{\alpha}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'} = \frac{(2k+2m)'}{(2m)'\,(k+m)'\,(2k)'},$$

$$\int_{\substack{\alpha+2\beta=2m+1\\ \alpha+2\gamma=2k+1}} \frac{2^{\alpha}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'} = \frac{(2k+2m+2)'}{(2m+1)'\,(k+m+1)'\,(2k+1)'}$$

Es ist derowegen, wenn n und l *gleichartige*, das heist beide zugleich entweder gerade, oder ungerade ganze nicht negative Zahlen sind,

$$\int \frac{2^{\alpha}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,\gamma^{l}} = \frac{(n+1)^{l}}{n^{l}\,((n+1):2)^{l}\,1^{l}}$$

$$\alpha+2\beta=n,\quad \alpha+2\gamma=1$$

4.) *Zusatz.* Die Bedingung, dafs n und l *gleichartig* seyn sollen, kann man durch die hinzukommende Bedingungsgleichung zwischen unveränderlichen Gröfsen $n+1=2m$ ausdrücken, wo auch m Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, und so erhält man

$$\int \frac{2^{\alpha}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,\gamma^{l}} = \int \frac{(2m)^{l}}{n^{l}\,m^{l}\,1^{l}}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\beta+\gamma=m,\ \alpha+2\gamma=1 \qquad n+1=2m$$

Wir werden diese merkwürdige Gleichung bald noch auf einem andern Wege erhalten.

5.) *Zusatz.* Dividirt man von den beiden Formeln des 2.) Zus. die erste durch $e^{n:2\,1\,2r}$ die andere durch $(e+r)^{(n-1):2\,1\,2r}$, so erhält man nach §. 35. 6)

$$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(e+\alpha r)^{\beta\,1\,2r}} = \frac{(e-nr+r)^{n:2\,1\,2r}}{n^{l}\,e^{n:2\,1\,2r}},\ \text{wenn n gerade ist}$$
$$\alpha+2\beta=n$$

$$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(e+\alpha r)^{\beta\,1\,2r}} = \frac{(e-nr+r)^{(n-1):2\,1\,2r}}{n^{l}\,(e+r)^{(n-1):2\,1\,2r}},\ \text{wenn n ungerade ist}$$
$$\alpha+2\beta=n$$

oder, welches nach §. 35. 1) einerlei ist

$$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(e+\alpha r+2\beta r-2r)^{\beta\,1-2r}} =$$
$$\alpha+2\beta=n$$

$$\frac{(e-r)^{n:2\,1-2r}}{n^{l}\,(e+nr-2r)^{n:2\,1-2r}},\ \text{wenn n gerade ist}$$

$$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(e+\alpha r+2\beta r-2r)^{\beta l-2r}} = \frac{(e-2r)^{(n-1):2l-2r}}{n^{l}\,(e+nr-2r)^{(n-1):2l-2r}}$$

$\alpha+2\beta=n$

, wenn n ungerade ist.

Setzt man nun hier $e+nr-r=x$, oder $e=x+r-nr$, so erhält man

1) $$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(x-r)^{\beta l-2r}} = \frac{(x-nr)^{n:2l-2r}}{n^{l}\,(x-r)^{n:2l-2r}}$$

$\alpha+2\beta=n$

, wenn n gerade ist

2) $$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(x-r)^{\beta l-2r}} = \frac{(x-r-nr)^{(n-1):2l-2r}}{n^{l}\,(x-r)^{(n-1):2l-2r}}$$

$\alpha+2\beta=n$

, wenn n ungerade ist.

6.) *Zusatz.* Man kann aber auch Formeln aufstellen, welche den Werth des links stehenden combinatorischen Integrals so angeben, dafs man gerade und ungerade Werthe von n nicht zu unterscheiden braucht. Multiplicirt man nehmlich Zähler und Nenner in 1) mit $x^{n:2l-2r}$, in 2) mit $x^{(n+1):2l-2r}$, so erhält man nach §. 35. 6) im *Zähler*, nach §. 35. 8) wenn n gerade, und nach §. 35. 9) wenn n ungerade ist, im *Nenner*

1) $$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(x-r)^{\beta l-2r}} = \frac{x^{nl-2r}}{n^{l}\,x^{nl-2}}$$

$\alpha+2\beta=n$

oder, welches einerley ist, nach §. 35. 5)

2) $$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,2^{\beta}\,(x-r)^{\beta l-2r}} = \frac{(x-2r)^{n-1l-2r}}{n^{l}\,(x-r)^{n-1l-r}}$$

$\alpha+2\beta=n$

oder, welches abermals dafselbe ist, wenn man Zähler und Nenner in 1) mit $(x-nr-r)^{n:2l-2r}$, in 2) mit $(x-nr)^{(n+1):2l-2r}$ multiplicirt, und zwar im *Nenner* nach §. 35. 6), im *Zähler* im ersten Fall nach §. 35. 8), im andern nach §. 35. 9)

3) $$\int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}\,(x-r)^{\beta|-2r}} \frac{(x-nr)^{n|-r}}{n'\,(x-r)^{n|-2r}} = \int \frac{(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} \frac{x^{n|-r}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

§. 54.

Lehrsatz.

Wenn n *eine ganze nicht negative Zahl bedeutet, so ist*

$$\int \frac{c^{\alpha+\beta|2r}\,(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} = \frac{c^{n|r}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

Beweis. Man multiplicire von den beiden Formeln im 2.) Zusatze zu vorigem §. die erste mit $(e-nr)^{n:2|2r}$, oder die andere mit $(e-nr)^{(n+1):2|2r}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so erhält man in *beiden* Fällen links nach §. 35. 6), rechts im *ersten* Falle nach §. 35. 8), im *andern* nach §. 35. 9)

$$\int \frac{(e-nr)^{\alpha+\beta|2r}\,(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} = \frac{(e-nr)^{n|r}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

Setzt man hier $e = c + nr$, so erhält man das zu beweisende.

1.) *Zusatz.* Die angeführte Formel lehrt eine Factorielle in eine Reihe anderer Factoriellen verwandeln, von eben der Basis, aber der doppelten Differenz. — — Setzt man aber darinnen 2c statt c, so erhält man, mit Zuziehung von §. 35. 2)

$$\int \frac{2^{\alpha}\,c^{\alpha+\beta|r}\,(-r)^{\beta}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(2c)^{n|r}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

welche Formel eine Factorielle in eine Reihe anderer von eben der Differenz, aber der halben Basis verwandeln lehrt. Man erhielte sie auch aus der Formel des Lehrsatzes §. 51. für $a = b = 1$, mit Zuziehung von §. 45. 2).

2.) *Zusatz.* Setzt man in der eben erwiesenen Formel $r = -1$, $c = m$, wo auch m Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man

$$\int \frac{2^{\alpha}\, m^{\alpha+\beta 1-1}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{(2m)^{n1-1}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

Da aber das allgemeine Glied dieses combinatorischen Integrals verschwindet, sobald $\alpha + \beta > m$, oder $m - \alpha - \beta$ eine ganze negative Zahl ist, so kann nach §. 32. Zus. die Bedingungsgleichung $\alpha + \beta + \gamma = m$ hinzugefügt werden, und so erhält man

$$\int \frac{2^{\alpha}\, (\alpha+\beta+\gamma)^{\alpha+\beta 1-1}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{(2m)^{n1-1}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n,\ \alpha + \beta + \gamma = m$$

oder, wenn man durch m' dividirt, nach §. 36. 1.) Zus.

$$\int \frac{2^{\alpha}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \frac{(2m)^{n1-1}}{m'\ n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n,\ \alpha + \beta + \gamma = m$$

3.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in dieser Gleichung folgt $\alpha + 2\gamma = 2m - n$. Daraus erhellet, dafs selbige unauflösbar sind, wenn $2m < n$ ist, mithin der Werth des combinatorischen Integrals nach §. 6. 1.) Zus. dann Null ist. Dafs die Gröfse rechts dann ebenfalls verschwinde, ist für sich klar. — — Soll dies also nicht der Fall seyn, so mufs $2m - n$ ebenfalls Null oder eine ganze positive Zahl seyn. Bezeichnet man nun diese mit l, so erhält man

$$\int \frac{2^{\alpha}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \int \frac{(2m)^{l}}{l'\ m'\ n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n,\ \alpha + \beta + \gamma = m,\ \alpha + 2\gamma = l \qquad l + n = 2m$$

oder die Gleichung in §. 53. 4.) Zus.

§. 55.

Lehrsatz.

Wenn n *Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist*

$$1)\quad \int \frac{e^{\alpha|r}(e+r+\alpha r)^{\beta|2r}(-r)^{\beta}}{\alpha'\ \beta'\ 2^{\beta}} = \frac{(e-nr+r)^{n|2r}}{n'}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$2)\quad \int \frac{e^{\alpha|r}(e+\alpha r)^{\beta|2r}(-r)^{\beta}}{\alpha'\ \beta'\ 2^{\beta}} = \frac{e(e-nr+2r)^{n-1|2r}}{n'}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

Beweis. Multiplicirt man von den beiden Formeln in §. 53. 2.) Zus. die erste mit $(e+r)^{n:2|2r}$, oder die andere mit $e^{(n+1):2|2r}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so bekommt man mit Zuziehung von §. 35. 6), und im ersten Falle von §. 35. 8), im andern von §. 35. 9) die Formel 1).

Multiplicirt man nun die Formel 1) mit $(e-r) : (e+nr-r)$, so erhält man nach §. 35. 4) und 5)

$$\int \frac{(e-r)^{\alpha+1|r}(e+r+\alpha r)^{\beta-1|2r}(-r)^{\beta}}{\alpha'\ \beta'\ 2^{\beta}} =$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\int \frac{(e-r)^{\alpha|r}(e-r+\alpha r)^{\beta|2r}(-r)^{\beta}}{\alpha'\ \beta'\ 2^{\beta}} = \frac{(e-r)(e-nr+r)^{n-1|2r}}{n'}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

Die nehmliche Formel erhielte man auch, wenn man von den beiden Formeln in §. 53. 2.) Zus., die erste mit $(e-r)^{n:2|2r}$, oder die andere mit $(e-r)\ e^{(n-1):2|2r}$ multiplicirt hätte. — — Setzt man nun $e+r$ statt e, so erhält man die Formel 2).

1.) *Zusatz.* Wie aus §. 35. 1) leicht erhellet, so ändern sich die Gröfsen rechts, in den Formeln des Lehrsatzes nicht, wenn man $-r$

statt r setzt. — — Setzt man aber in den nehmlichen beiden Formeln e + n r statt e, so erhält man

$$1)\quad \sum_{\substack{\alpha' \beta' 2^{\beta} \\ \alpha + 2\beta = n}} \frac{(e+\alpha r+2\beta r)^{\alpha\,1\,r}\,(e+r+2\alpha r+2\beta r)^{\beta\,1\,2\,r}\,(-r)^{\beta}}{} = \frac{(e+r)^{n\,1\,2r}}{n'}$$

$$2)\quad \sum_{\substack{\alpha' \beta' 2^{\beta} \\ \alpha + 2\beta = n}} \frac{(e+\alpha r+2\beta r)^{\alpha\,1\,r}\,(e+2\alpha r+2\beta r)^{\beta\,1\,2\,r}\,(-r)^{\beta}}{} = \frac{(e+nr)\,(e+2r)^{n-1\,1\,2r}}{n'}$$

2.) *Zusatz.* Nach §. 35. 1) kann man die beiden Formeln des Lehrsatzes auch so ausdrücken

$$\sum_{\substack{\alpha' \beta' 2^{\beta} \\ \alpha + 2\beta = n}} \frac{(e-r+\alpha r)^{\alpha\,1\,-\,r}\,(e-r+\alpha r+2\beta r)^{\beta\,1\,-\,2\,r}\,(-r)^{\beta}}{} = \frac{(e+nr-r)^{n\,1\,-\,2r}}{n'}$$

$$\sum_{\substack{\alpha' \beta' 2^{\beta} \\ \alpha + 2\beta = n}} \frac{(e-r+\alpha r)^{\alpha\,1\,-\,r}\,(e-2r+\alpha r+2\beta r)^{\beta\,1\,-\,2\,r}\,(-r)^{\beta}}{} = \frac{e\,(e+nr-2r)^{n-1\,1\,-\,2r}}{n'}$$

und, wenn man in der ersten e + r − n r, in der andern e + 2 r − n r statt e setzt,

$$1)\quad \sum_{\substack{\alpha' \beta' 2^{\beta} \\ \alpha + 2\beta = n}} \frac{e^{\beta\,1\,-\,2\,r}\,(e-2\beta r)^{\alpha\,1\,-\,r}\,(-r)^{\beta}}{} = \frac{e^{n\,1\,-\,2r}}{n'}$$

$$2)\quad \sum_{\substack{\alpha' \beta' 2^{\beta} \\ \alpha + 2\beta = n}} \frac{e^{\beta\,1\,-\,2r}\,(e-2\beta r+r)^{\alpha\,1\,-\,r}\,(-r)^{\beta}}{} = \frac{(e+2r-nr)\,e^{n-1\,1\,-\,2r}}{n'}$$

3.) *Zusatz.* Multiplicirt man die beiden Formeln des Lehrsatzes mit $(-1)^n$, so erhält man mit Zuziehung von §. 35. 3)

$$1)\quad \int \frac{(-1)^{\alpha} e^{\alpha|r} (e+r+\alpha 1)^{\beta|2r} (-r)^{\beta}}{\alpha' \beta' 2^{\beta}} = \frac{(r-e-nr)^{n|2r}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

$$2)\quad \int \frac{(-1)^{\alpha} e^{\alpha|r} (e+\alpha r)^{\beta|2r} (-1)^{\beta}}{\alpha' \beta' 2^{\beta}} = \frac{(-e)(2r-e-nr)^{n-1|2r}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

4.) *Zusatz.* Setzt man in den beiden Formeln des Lehrsatzes $f = -1$, $e = m$, wo m Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man

$$\int \frac{m^{\alpha|-1} (m-\alpha-1)^{\beta|-2}}{\alpha' \beta' 2^{\beta}} = \frac{(m+n-1)^{n|-2}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

$$\int \frac{m^{\alpha|-1} (m-\alpha)^{\beta|-2}}{\alpha' \beta' 2^{\beta}} = \frac{m(m+n-2)^{n-1|-2}}{n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n$$

Da aber die allgemeinen Glieder der combinatorischen Integrale verschwinden, sobald $\alpha \geqq m+1$ ist, so kann man nach §. 28. 2.) Zus. die Bedingungsgleichung $\alpha + \gamma = m$ beiderseits hinzufügen, und erhält so, wenn man zugleich durch m' dividirt

$$1)\quad \int \frac{(\gamma-1)^{\beta|-2}}{\alpha' \beta' \gamma' 2^{\beta}} = \frac{(m+n-1)^{n|-2}}{m' n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n,\quad \alpha + \gamma = m$$

$$2)\quad \int \frac{\gamma^{\beta|-2}}{\alpha' \beta' \gamma' 2^{\beta}} = \int \frac{(m+n-2)^{n-1|-2}}{(m-1)' n'}$$
$$\alpha + 2\beta = n,\quad \alpha + \gamma = m \qquad m+n = k+1$$
$$m+n = k+1$$

Da nehmlich in der Gleichung 2) nicht füglich m und n *zugleich* Null

seyn kann, weil sonst Zähler und Nenner des Bruchs rechts zugleich unendlich grofs würden, so wird dieser Fall durch die hinzukommende Bedingungsgleichung $m+n=k+1$ zwischen unveränderlichen Gröfsen, wo auch k Null oder eine ganze positive Zahl ist, ausgeschlossen.

Multiplicirt man aber die Gleichung 2) mit $\gamma-2\beta=m-n$, so fällt dieser Grund weg, die gedachte Bedingungsgleichung kann also auch wieder wegfallen, und man erhält nach §. 35. 4)

$$\int \frac{\gamma^{\beta+1\,1-2}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,2^{\beta}} = \frac{(m+n-2)^{n1-2}}{(m-1)'\,n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\gamma=m$$

Da aber das allgemeine Glied des combinatorischen Integrals für $\gamma=0$ verschwindet, so kann man nach §. 26. 1.) Zus. diese Gleichung auch so ausdrücken

$$\int \frac{(\gamma+1)^{\beta+1\,1-2}}{\alpha'\,\beta'\,(\gamma+1)'\,2^{\beta}} = \frac{(m+n-2)^{n1-2}}{(m-1)'\,n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\gamma=m-1$$

oder, welches nach §. 35. 5) und §. 36. 2.) Zus. einerlei ist

3) $$\int \frac{(\gamma-1)^{\beta 1-2}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,2^{\beta}} = \frac{(m+n-2)^{n1-2}}{(m-1)'\,n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\gamma=m-1$$

Diese Gleichung ist einerlei mit 1), nur einigermafsen allgemeiner, weil sie aus 1) entsteht, wenn man darinnen $m-1$ statt m setzt.

5.) *Zusatz.* Eben so könnte man rückwärts die Gleichung 2) des vorigen Zusatzes aus der Gleichung 3) ebendaselbst ableiten, jedoch mit Ausnahme des Falles, wenn $m=n$ ist. Für diesen Fall aber, verwandelt sich die Gleichung 2) in folgende

$$\int \frac{\gamma^{\beta 1-2}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,2^{\beta}} = \int \frac{(2n-2)^{n-1\,1-2}}{(n-1)'\,n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\gamma=n,\ 2n=k+1 \qquad 2n=k+1$$

oder, da im Integrale links $\gamma = 2\beta$ ist, nach §. 15.

$$\int \frac{(2\beta)^{\beta 1-2}}{\alpha' \beta' (2\beta)' 2^{\beta}} = \int \frac{2^{n-1}}{n'}$$

$$\alpha + 2\beta = n,\ 2n = k+1 \qquad 2n = k+1$$

oder, welches einerlei ist

$$\int \frac{1}{\alpha' (2\beta)'} = \int \frac{2^{n-1}}{n'}$$

$$\alpha + 2\beta = n,\ 2n = k+1 \qquad 2n = k+1$$

Die Richtigkeit dieser Formel erhellet aber auch aus der Formel 1) im 4.) Zus. zu §. 38.; denn wie aus der Bedingungsgleichung $2n = k+1$, zwischen unveränderlichen Gröfsen folgt, so kann n nicht Null, sondern blos eine ganze positive Zahl seyn.

6.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in der Gleichung 3) des 4.) Zusatzes folgt:

$$2\alpha + 2\beta + \gamma = m + n - 1,\quad \gamma - 2\beta = m - n - 1$$

woraus erhellet, dafs, wenn m und n *gleichartig* sind, γ blos *ungerade*, wenn aber m und n *ungleichartig* sind, dafs dann γ blos *gerade* Werthe haben könne.

Aus den Bedingungsgleichungen des combinatorischen Integrals in der Gleichung 2) ebendaselbst, folgt

$$2\alpha + 2\beta + \gamma = m + n,\quad \gamma - 2\beta = m - n$$

woraus erhellet, dafs, wenn m und n *gleichartig* sind, γ blos *gerade*, wenn aber m und n *ungleichartig* sind, γ blos *ungerade* Werthe haben könne.

7.) *Zusatz.* Ist in der Gleichung 3) m und n gleichartig, und $m - 1 \prec n$, so verschwinden alle Glieder des combinatorischen Integrals. Denn dann ist noch vielmehr $m - 2 \prec n$, also auch $\gamma - 1 \prec 2\beta$, aber auch nach vorigem Zusatz $\gamma - 1$ Null oder eine gerade positive Zahl, also verschwinden alle Glieder des Integrals. Dafs aber auch die Gröfse rechts verschwinden müsse, bedarf für $m = 0$ keines Beweises. Ist aber $m \succ 0$,

so ist $m+n-2$ Null oder eine gerade positive Zahl, und, da $m-2 \prec n$, auch $m+n-2 \prec 2n$.

Ist aber in der Gleichung 2) m und n gleichartig und $m+1 \prec n$, so verschwinden alle Glieder des links stehenden combinatorischen Integrals. Denn dann ist noch vielmehr $m \prec n$, also auch $\gamma \prec 2\beta$, aber auch nach vorigem Zusatz γ Null oder eine gerade positive Zahl, also verschwinden alle Glieder des Integrals. Es ist aber auch dann $m+n-2$ Null oder eine gerade positive Zahl, und, da $m \prec n$, auch $m+n-2 \prec 2n-2$, also verschwindet auch die Gröfse rechts.

8.) *Zusatz.* Ist aber in der Gleichung 3) des 4.) Zusatzes m und n gleichartig, jedoch $m-1 \succ n$, so kann man, daferne l Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, $m-1 = n+2l+1$, oder $m = n+2l+2$, setzen, und erhält so

$$\int \frac{(\gamma-1)^{\beta|-2}}{\alpha'\beta'\gamma'2^{\beta}} = \frac{(2n+2l)^{n|-2}}{(n+2l+1)'n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\gamma=n+2l+1$$

oder, da nach den Bedingungsgleichungen $\gamma = 2\beta+2l+1$ ist, nach §. 15.

$$\int \frac{(2\beta+2l)^{\beta|-2}}{\alpha'\beta'(2\beta+2l+1)'2^{\beta}} = \frac{(2n+2l)^{n|-2}}{(n+2l+1)'n'}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

oder mit $(2l)^{l|-2}$ multiplicirt, nach §. 35. 6)

$$\int \frac{(2\beta+2l)^{\beta+l|-2}}{\alpha'\beta'(2\beta+2l+1)'2^{\beta}} = \frac{(2n+2l)^{n+l|-2}}{(n+2l+1)'n'}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

oder

$$1)\int \frac{1}{\alpha'\beta'\,{}_1\beta+l+1|2\,{}_2\beta} = \frac{(2n+2l)^{n+l|-2}}{(n+2l+1)'n'}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

Ist eben so in der Gleichung 2) des 4.) Zusatzes m und n gleichartig,

jedoch $m+1 > n$, so kann man, daferne l Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, auch $m+1 = n+2l+1$, oder $m = n+2l$ setzen, und erhält so

$$\int \frac{\gamma^{\beta l-2}}{\alpha^l \beta^l \gamma^l 2^\beta} = \int \frac{(2n+2l-2)^{n+l-1}}{(n+2l-1)^l n^l}$$

$$\alpha+2\beta = n,\ \alpha+\gamma = n+2l \qquad 2n+2l = k+1$$

$$2n+2l = k+1$$

oder, da nach den Bedingungsgleichungen des links stehenden Integrals $\gamma = 2l+2\beta$ ist, nach §. 15.

$$\int \frac{(2l+2\beta)^{\beta l-2}}{\alpha^l \beta^l (2l+2\beta)^l 2^\beta} = \int \frac{(2n+2l-2)^{n+l-1}}{(n+2l-1)^l n^l}$$

$$\alpha+2\beta = n,\ 2n+2l = k+1 \qquad 2n+2l = k+1$$

oder mit $(2l)^{l-2}$ multiplicirt, nach §. 35. 6)

$$\int \frac{(2l+2\beta)^{l+\beta l-2}}{\alpha^l \beta^l (2l+2\beta)^l 2^\beta} = \int \frac{(2n+2l-2)^{n+l-1}}{(n+2l-1)^l n^l}$$

$$\alpha+2\beta = n,\ 2n+2l = k+1 \qquad 2n+2l = k+1$$

oder

$$2)\ \int \frac{1}{\alpha^l \beta^l 1^{l+\beta l} 2^\beta} = \int \frac{(2n+2l-2)^{n+l-1}}{(n+2l-1)^l n^l}$$

$$\alpha+2\beta = n,\ 2n+2l = k+1 \qquad 2n+2l = k+1$$

Statt der Bedingungsgleichung $2n+2l = k+1$ zwischen unveränderlichen Grösen hätte man auch die $n+l = k+1$ setzen können. Durch Hinzufügung derselben, wird nehmlich blos verhindert, dafs n und l nicht zugleich o seyn können.

Setzt man in letzterer Gleichung 2) $l+1$ statt l, so erhält man wieder die Gleichung 1).

Aus der Gleichung 1) folgt wieder, wenn man sie mit $1^{l+1} l^2$ multiplicirt, nach §. 35. 6)

$$\int \frac{1}{\alpha'^{\beta'}(2l+3)^{\beta|2}\,2^{\beta}} = \frac{1^{l+1|2}(2n+2l)^{n|+l|-2}}{(n+2l+1)^{l}\,n'^{l}}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\frac{1^{l+n+1|2}(2n+2l)^{n+l|-2}}{(n+2l+1)^{l}\,n'^{l}\,(2l+3)^{n|2}} = \frac{(2l+2n+1)^{l}}{(n+2l+1)^{l}\,n'^{l}\,(2l+3)^{n|2}} = \frac{(n+2l+2)^{n|1}}{n'^{l}\,(2l+3)^{n|2}}$$

deren Richtigkeit auch aus §. 53. 6.) Zus. 3) erhellet.

Da also die veränderliche Gröfse γ hier allemal weggeschaft werden kann, so erhellet, dafs, wenn man in den Formeln 3) und 2) des 4.) Zusatzes m und n gleichartig, und in der ersten $m-1 \gtrless n$, in der andern aber $m+1 \gtrless n$ annimmt, man keine Formeln erhält, welche von den vorigen wesentlich verschieden sind.

9.) *Zusatz.* Nimmt man aber in den Formeln 3) und 2) des 4.) Zusatzes m und n ungleichartig an, so kann man beiderseits die Gleichung $m+n=2l+1$ zwischen unveränderlichen Gröfsen hinzufügen, und erhält so folgende Reihe von Schlüssen:

aus 3)

$$\int \frac{(\gamma-1)^{\beta|-2}}{\alpha'^{\beta'}\gamma'^{\,2^{\beta}}} = \int \frac{(2l-1)^{n|-2}}{(m-1)^{l}\,n'^{l}},$$

$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\gamma=m-1$ $\quad m+n=2l+1$

$m+n=2l+1$

aus 2)

$$\int \frac{\gamma^{\beta|-2}}{\alpha'^{\beta'}\gamma'^{\,2^{\beta}}} = \int \frac{(2l-1)^{n-1|-2}}{(m-1)^{l}\,n'^{l}}$$

$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+\gamma=m$ $\quad m+n=2l+1$

$m+n=2l+1$

oder

$$\int \frac{(2\gamma-1)^{\beta|-2}}{\alpha'^{\beta'}(2\gamma)^{l}\,2^{\beta}} = \int \frac{(2l-1)^{n|-2}}{(m-1)^{l}\,n'^{l}}, \qquad \int \frac{(2\gamma+1)^{\beta|-2}}{\alpha'^{\beta'}(2\gamma+1)^{l}\,2^{\beta}} = \int \frac{(2l-1)^{n-1|-2}}{(m-1)^{l}\,n'^{l}}$$

$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+2\gamma=m-1$ $\quad m+n=2l+1$ $\quad \alpha+2\beta=n,\ \alpha+2\gamma=m-1$ $\quad m+n=2l+1$

$\alpha+\beta+\gamma=l$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\alpha+\beta+\gamma=l$

oder, da $\gamma-\beta=l-n$, multiplicirt mit $(2\gamma-1-2\beta)^{\gamma-\beta|-2} = (2l-2n-1)^{l-n|-2}$ und $(2\gamma+1-2\beta)^{\gamma+1-\beta|-2} = (2l+1-2n)^{l+1-n|-2}$

$$\int \frac{(2\gamma-1)^{\gamma}\,|-2}{\alpha'\,\beta'\,(2\gamma)'\,2^{\beta}} = \int \frac{(2l-1)^{ll-2}}{(m-1)'\,n'}, \quad \int \frac{(2\gamma+1)^{\gamma+1}\,|-2}{\alpha'\,\beta'\,(2\gamma+1)'\,2^{\beta}} = \int \frac{(2l-1)^{ll-2}}{(m-1)'\,n'}$$

$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+2\gamma=m-1\quad m+n=2l+1\qquad \alpha+2\beta=n,\ \alpha+2\gamma=m-1\quad m+n=2+1$

$\alpha+\beta+\gamma=1\qquad\qquad \alpha+\beta+\gamma=1$

Diese beiden Gleichungen sind einerlei, und man kann sie auch so ausdrücken:

$$\int \frac{1}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,2^{\beta+\gamma}} = \int \frac{(2l-1)^{ll-2}}{(m-1)'\,n'}$$

$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+2\gamma=m-1\qquad m+n=2l+1$

$\alpha+\beta+\gamma=1$

und mit 2^l multiplicirt

$$\int \frac{2^{\alpha}}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'} = \int \frac{(2l)'}{(m-1)'\,l'\,n'}$$

$\alpha+2\beta=n,\ \alpha+2\gamma=m-1\qquad m+n-1=2l$

$\alpha+\beta+\gamma=1$

Dies ist aber nichts anders als die schon oben im §. 53. 4.) Zus. und in §. 54. 3.) Zus. gefundene Formel, nur $m-1$ statt m gesetzt.

10.) *Zusatz.* Setzt man in den Formeln des 2.) Zusatzes $r=1$, $e=2m$, wo m eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet, so erhält man

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(2m)^{\beta l-2}(2m-2\beta)^{\alpha l-1}}{\alpha'\,\beta'\,2^{\beta}} =$$

$\alpha+2\beta=n$

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\,m^{\beta l-1}\,(2m-2\beta)^{\alpha l-1}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(2m)^{nl-2}}{n'}$$

$\alpha+2\beta=n$

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(2m)^{\beta\,1-2}(2m-2\beta+1)^{\alpha\,1-1}}{\alpha'\ \beta'\ 2^{\beta}} = \int \frac{(-1)^{\beta} m^{\beta\,1-1}(2m-2\beta+1)^{\alpha\,1-1}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{(2m+2-n)(2m)^{n-1\,1-2}}{n'}$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\alpha+2\beta=n$$

Weil nun die allgemeinen Glieder der combinatorischen Integrale verschwinden, sobald $\beta \geqq m+1$ ist, so hat man nach §. 28. 2.) Zus. auch, wenn man zugleich durch m' dividirt,

$$1)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma)^{\alpha\,1-1}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \frac{2^{n}}{(m-n)'\ n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

$$2)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma+1)^{\alpha\,1-1}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \frac{(2m+2-n)\,2^{n-1}}{(m+1-n)'\ n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

Nun ist nach den Bedingungsgleichungen $2\gamma-\alpha=2m-n$. Multiplicirt man also die Gleichung 1) damit, so erhält man

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma)^{\alpha+1\,1-1}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \frac{(2m-n)\,2^{n}}{(m-n)'\ n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

oder, weil das allgemeine Glied für $\gamma=0$ verschwindet, nach §. 26. 1.) Zus.

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma+2)^{\alpha+1\,1-1}}{\alpha'\ \beta'\ (\gamma+1)'} = \frac{(2m-n)\,2^{n}}{(m-n)'\ n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m-1$$

also halbirt

$$3)\quad \int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma+1)^{\alpha\,1-1}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \frac{(2m-n)\,2^{n-1}}{(m-n)'\ n'}$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m-1$$

Diese Gleichung 3) entsteht auch aus 2), wenn man darinnen $m-1$ statt m setzt, sie ist also einigermassen allgemeiner.

11.) *Zusatz.* Ist in 1) $2m \prec n$, in 2) $2m+1 \prec n$, in 3) $2m-1 \prec n$, so ist auch in 1) $2\gamma \prec \alpha$, in 2) $2\gamma+1 \prec \alpha$, in 3) $2\gamma+1 \prec \alpha$. Es verschwinden also die combinatorischen Integrale. Dafs aber auch dann die andern Gröfsen verschwinden, erhellet so. Ist $2m \prec n$, so ist, da $m \preceq 2m$, auch $m \prec n$, mithin verschwindet in 1) die Gröfse rechts. — Ist $2m+1 \prec n$, so ist, da $m \preceq 2m$, auch $m+1 \prec n$, mithin verschwindet in 2) die Gröfse rechts. — Ist endlich $2m-1 \prec n$, so ist auch $2m \preceq n$, also entweder $2m = n$, oder $2m \prec n$. Im ersten Fall verschwindet in 3) die Gröfse rechts, wegen des Factors $2m-n$ im *Zähler*. Im andern ist noch vielmehr $m \prec n$, mithin verschwindet sie, wegen des Factors $(m-n)'$ im *Nenner*.

12.) *Zusatz.* Sollen also in den drei Gleichungen des 10.) Zus. die combinatorischen Integrale nicht verschwinden, so kann man in 1) die Bedingungsgleichung $n+l=2m$, in 2) $n+l=2m+1$, in 3) $n+l=2m-1$ hinzufügen, und erhält so

aus 1)

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma)^{\alpha|-1}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \int \frac{2^n}{(m-n)'\ n'}, \qquad \int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma+1)^{\alpha|-1}}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \int \frac{(l+1)2^{n-1}}{(m-n)'\ n'}$$

aus 3)

$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$ $\quad n+l=2m$ $\qquad$ $\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m-1$ $\quad n+l=2m-1$

$n+l=2m$ $\qquad$ $n+l=2m-1$

Nun ist in der ersten Gleichung $2\gamma-\alpha=l$, in der andern $2\gamma+1-\alpha=l$. Multiplicirt man also beide mit l' so erhält man,

1) $$\int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma)'}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \int \frac{l'\ 2^n}{(m-n)'\ n'}$$

$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$ $\qquad$ $n+l=2m$

$n+l=2m$

2) $$\int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma+1)'}{\alpha'\ \beta'\ \gamma'} = \int \frac{(l+1)'\ 2^{n-1}}{(m-n)'\ n'}$$

$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m-1$ $\qquad$ $n+l=2m-1$

$n+l=2m-1$

13.) *Zusatz.* Man kann diese Gleichungen, da in 1) $2\gamma = \alpha + 1$, in 2) aber $2\gamma = \alpha + 1 - 1$ ist, nach §. 15. auch so ausdrücken:

1) $$\int \frac{(-1)^\beta (1+\alpha)^l}{\alpha^l \beta^l ((1+\alpha):2)^l} \Bigg\}_{\alpha+2\beta=n,\ n+1=2m} = \int \frac{1^l\ 2^n}{(m-n)^l\ n^l} \Bigg\}_{n+1=2m}$$

2) $$\int \frac{(-1)^\beta (1+\alpha)^l}{\alpha^l \beta^l ((1+\alpha-1):2)^l} \Bigg\}_{\alpha+2\beta=n,\ n+1=2m-1} = \int \frac{(1+1)^l\ 2^{n-1}}{(m-n)^l\ n^l} \Bigg\}_{n+1=2m-1}$$

Da also γ wegfällt, so erhellet, dafs diese Formeln von den vorigen wesentlich nicht verschieden sind.

14.) *Zusatz.* Setzt man in der Gleichung 1) des 12.) Zus. $1+1$ statt 1, so erhält man

$$\int \frac{(-1)^\beta (2\gamma)^l}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l} \Bigg\}_{\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ n+1=2m-1} = \int \frac{(1+1)^l\ 2^n}{(m-n)^l\ n^l} \Bigg\}_{n+1=2m-1}$$

Nun folgt aus den Bedingungsgleichungen des links stehenden combinatorischen Integrals $2\gamma - \alpha = 2m - n = 1 + 1$, oder $2\gamma = 1 + \alpha + 1$. Hieraus erhellet, dafs γ nicht Null seyn kann. Man kann also nach §. 26. 1.) Zus. überall links $\gamma + 1$ statt γ setzen, und erhält so

$$\int \frac{(-1)^\beta (2\gamma+2)^l}{\alpha^l\ \beta^l\ (\gamma+1)^l} \Bigg\}_{\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m-1,\ n+1=2m-1} = \int \frac{(1+1)^l\ 2^n}{(m-n)^l\ n^l} \Bigg\}_{n+1=2m-1}$$

oder halbirt

$$\int \frac{(-1)^\beta (2\gamma+1)^l}{\alpha^l\ \beta^l\ \gamma^l} \Bigg\}_{\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m-1,\ n+1=2m-1} = \int \frac{(1+1)^l\ 2^{n-1}}{(m-n)^l\ n^l} \Bigg\}_{n+1=2m-1}$$

oder die Gleichung 2) ebendaselbst.

15.) *Zusatz.* Eben so könnte man rückwärts aus der Gleichung 2) des 12.) Zusatzes die Gleichung 1) ebendaselbst ableiten, den einzigen

Fall, wenn $l = o$ ist ausgenommen. Für diesen aber verwandelt sich letztere in folgende

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma)^{l}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,\gamma^{l}} = \int \frac{2^{n}}{(m-n)^{l}\,n^{l}}$$

$$\alpha + 2\beta = n,\ \beta + \gamma = m,\ n = 2m \qquad n = 2m$$

oder

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(2\gamma)^{l}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,\gamma^{l}} = \frac{2^{2m}}{(-m)^{i}\,(2m)^{l}}$$

$$\alpha + 2\beta = 2m,\ \beta + \gamma = m$$

oder, weil links $\alpha = 2\gamma$ ist, nach §. 15.

$$\int \frac{(-1)^{\beta}}{\beta^{l}\,\gamma^{l}} = \frac{2^{2m}}{(-m)^{l}\,(2m)^{l}}$$

$$\beta + \gamma = m$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellet aus §. 38. 1).

§. 56.

Lehrsatz.

Wenn n *Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist*

$$1)\ \int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\, b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}} = \frac{(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{n^{l}}$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$2)\ \int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha^{l}\ \beta^{l}} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{n^{l}}$$

Beweis. Nach §. 55. ist

$$\frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}}{\alpha^{l}} = \int \frac{a^{\gamma\,|\,r}(a+r+\gamma r)^{\delta\,|\,2r}(-r)^{\delta}}{\gamma^{l}\ \delta^{l}\ 2^{\delta}}$$

$$(\gamma,\ \delta)$$

$$\gamma + 2\delta = \alpha$$

$$\frac{a(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1}|2r}{\alpha'} = \int \frac{a^{\gamma}|r\,(a+\gamma r)^{\delta}|2r\,(-r)^{\delta}}{\gamma'\,\delta'\,2^{\delta}}$$

$$(\gamma,\ \delta)$$

$$\gamma+2\delta=\alpha$$

$$\frac{b(b+2r-\beta r)^{\beta-1}|2r}{\beta'} = \int \frac{b^{\varepsilon}|r\,(b+\varepsilon r)^{\zeta}|2r\,(-r)^{\zeta}}{\varepsilon'\,\zeta'\,2^{\zeta}}$$

$$(\varepsilon,\ \zeta)$$

$$\varepsilon+2\zeta=\beta$$

also, nach §. 11. und §. 17. 1.

$$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha}|2r\,b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1}|2r}{\alpha'\quad\beta'} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\int \frac{a^{\gamma}|r\,b^{\varepsilon}|r\,(a+r+\gamma r)^{\delta}|2r\,(b+\varepsilon r)^{\zeta}|2r\,(-r)^{\delta+\zeta}}{\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,\zeta'\,2^{\delta+\zeta}}$$

$$\gamma+2\delta=\alpha,\ \varepsilon+2\zeta=\beta,\ \alpha+\beta=n$$

Das Integral zur Rechten ist nach §. 15.

$$= \int \frac{a^{\gamma}|r\,b^{\varepsilon}|r\,(a+r+\gamma r)^{\delta}|2r\,(b+\varepsilon r)^{\zeta}|2r\,(-r)^{\delta+\zeta}}{\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,\zeta'\,2^{\delta+\zeta}}$$

$$\gamma+2\delta+\varepsilon+2\zeta=n$$

oder nach §. 13. Zus.

$$= \int \frac{a^{\gamma}|r\,b^{\varepsilon}|r\,(a+r+\gamma r)^{\delta}|2r\,(b+\varepsilon r)^{\zeta}|2r\,(-r)^{\vartheta}}{\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,\zeta'\,2^{\vartheta}}$$

$$\gamma+\varepsilon=\eta,\ \delta+\zeta=\vartheta,\ \eta+2\vartheta=n$$

oder, wenn man die veränderlichen Gröfsen δ und ζ nach §. 45. 2) wegschaft

$$= \int \frac{a^{\gamma}|r\,b^{\varepsilon}|r\,(a+b+r+\gamma r+\varepsilon r)^{\vartheta}|2r\,(-r)^{\vartheta}}{\gamma'\,\varepsilon'\,\vartheta'\,2^{\vartheta}}$$

$$\gamma+\varepsilon=\eta,\ \eta+2\vartheta=n$$

$$= \int \frac{a^{\gamma\,1\,r}\, b^{\varepsilon\,1\,r}\,(a+b+r+\nu r)^{\vartheta\,1\,2r}\,(-r)^{\vartheta}}{\gamma'\;\varepsilon'\;\vartheta'\;2^{\vartheta}}$$

$$\gamma+\varepsilon=\nu,\quad \nu+2\vartheta=n$$

oder, wenn man nun die veränderlichen Gröfsen γ und ε nach §. 45. 2) wegschaft, und nach §. 55. 1)

$$= \int \frac{(a+b)^{\nu\,1\,r}\,(a+b+r+\nu r)^{\vartheta\,1\,2r}\,(-r)^{\vartheta}}{\nu'\;\vartheta'\;2^{\vartheta}} = \frac{(a+b+r-nr)^{n\,1\,2r}}{n'}$$

$$\nu+2\vartheta=n$$

und somit die Gleichung 1) bewiesen.

Eben so ist nach §. 11. und §. 17. 1.

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,1\,2r}\; b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,1\,2r}}{\alpha'\;\beta'} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\int \frac{a^{\gamma\,1\,r}\, b^{\varepsilon\,1\,r}\,(a+\gamma r)^{\delta\,1\,2r}\,(b+\varepsilon r)^{\zeta\,1\,2r}\,(-r)^{\delta+\zeta}}{\gamma'\;\delta'\;\varepsilon'\;\zeta'\;2^{\delta+\zeta}}$$

$$\gamma+2\delta=\alpha,\quad \varepsilon+2\zeta=\beta,\quad \alpha+\beta=n$$

Das Integral zur Rechten ist nach §. 15.

$$= \int \frac{a^{\gamma\,1\,r}\, b^{\varepsilon\,1\,r}\,(a+\gamma r)^{\delta\,1\,2r}\,(b+\varepsilon r)^{\zeta\,1\,2r}\,(-r)^{\delta+\zeta}}{\gamma'\;\delta'\;\varepsilon'\;\zeta'\;2^{\delta+\zeta}}$$

$$\gamma+2\delta+\varepsilon+2\zeta=n$$

oder nach §. 13. Zus.

$$= \int \frac{a^{\gamma\,1\,r}\, b^{\varepsilon\,1\,r}\,(a+\gamma r)^{\delta\,1\,2r}\,(b+\varepsilon r)^{\zeta\,1\,2r}\,(-r)^{\vartheta}}{\gamma'\;\delta'\;\varepsilon'\;\zeta'\;2^{\vartheta}}$$

$$\gamma+\varepsilon=\nu,\quad \delta+\zeta=\vartheta,\quad \nu+2\vartheta=n$$

oder, wenn man die veränderlichen Gröfsen δ und ζ nach §. 45. 2) wegschaft

$$= \int \frac{a^{\gamma\,|\,r}\, b^{\varepsilon\,|\,r}\, (a+b+\gamma r+\varepsilon r)^{\vartheta\,|\,2r}\, (-r)^{\vartheta}}{\gamma'\ \varepsilon'\ \vartheta'\ {}_2{}^{\vartheta}} = \int \frac{a^{\gamma\,|\,r}\, b^{\varepsilon\,|\,r}\, (a+b+nr)^{\vartheta\,|\,2r}\, (-r)^{\vartheta}}{\gamma'\ \varepsilon'\ \vartheta'\ {}_2{}^{\vartheta}}$$

$$\gamma+\varepsilon=n,\quad n+2\vartheta=n$$

oder, wenn man nun die veränderlichen Gröfsen γ und ε nach §. 45. 2) wegschafft, und nach §. 55. 2)

$$= \int \frac{(a+b)^{n\,|\,r}\, (a+b+nr)^{\vartheta\,|\,2r}\, (-r)^{\vartheta}}{n'\ \vartheta'\ {}_2{}^{\vartheta}} = \frac{(a+b)\,(a+b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{n'}$$

$$n+2\vartheta=n$$

und somit die Gleichung 2) bewiesen.

1.) *Zusatz.* Man könnte die Gleichung 2) auch aus 1) so ableiten. Nach §. 26. 1.) Zus. und 1) ist

$$\int \frac{\alpha\, a\, (a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b\, (b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta=n+1$$

$$\int \frac{a\, (a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\, b\, (b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{a\,(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

und eben so

$$\int \frac{\beta\, a\, (a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b\, (b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$\alpha+\beta=n+1$$

$$\int \frac{a\, (a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b\, (b+r-\beta r)^{\beta\,|\,2r}}{\alpha'\ \beta'} = \frac{b\,(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

Addirt man nun diese beide Gleichungen, und dividirt dann durch $n+1$, so erhält man

$$\int \frac{a(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(a+b)\,(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{(n+1)'}$$
$$\alpha+\beta=n+1$$

So erhellet dafs die Gleichung richtig ist, wenn n *eine ganze positive Zahl* ist. Dafs sie aber auch für $n=0$ gilt, ist augenblicklich zu übersehen.

2.) *Zusatz.* Aus den Betrachtungen des vorigen Zusatzes ergiebt sich sogleich, dafs, wenn $a+b$ nicht Null ist

$$\int \frac{\alpha\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\;\beta'} = \frac{n(a+b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{n'}$$
$$\alpha+\beta=n$$

3.) *Zusatz.* Setzt man in den Gleichungen des Lehrsatzes $-b$ statt b, so erhält man, da nach §. 35. 3) $(-b)(-b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r} = (-1)^{\beta}(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}$ ist,

$$\int \frac{(-1)^{\beta}(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\, b(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\;\beta'} = \frac{(a-b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{n'}$$
$$\alpha+\beta=n$$

$$\int \frac{(-1)^{\beta}\,a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\;\beta'} =$$
$$\alpha+\beta=n$$
$$\frac{(a-b)\,(a-b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{n'}$$

Diese Gleichungen verbinde man mit denen, woraus sie entstanden sind, durch Addition und Subtraction, so erhält man nach §. 19. Zus.

1) $$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\, b(b+2r-2\beta r)^{2\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\,(2\beta)'} =$$
$$\alpha+2\beta=n$$
$$\frac{(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}+(a-b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2n'}$$

$$2)\ \int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\, b\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{\alpha'\,(2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1$$

$$\frac{(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}-(a-b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$3)\ \int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b\,(b+2r-2\beta r)^{2\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}+(a-b)\,(a-b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$4)\ \int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\, b\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{\alpha'\,(2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}-(a-b)\,(a-b+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{2\,n'}$$

Verwechselt man hier a und b, und in den Integralen α und β, so erhält man ferner:

$$5)\ \int \frac{a\,(a+2r-2\alpha r)^{2\alpha-1\,|\,2r}\,(b+r-\beta r)^{\beta\,|\,2r}}{(2\alpha)'\,\beta'} =$$

$$2\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(b+a+r-nr)^{n\,|\,2r}+(b-a+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$6)\ \int \frac{a\,(a+r-2\alpha r)^{2\alpha-1\,|\,2r}\,(b+r-\beta r)^{\beta\,|\,2r}}{(2\alpha+1)'\,\beta'} =$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

$$\frac{(b+a+r-nr)^{n\,|\,2r}-(b-a+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$7)\ \int \frac{a\,(a+2r-2\alpha r)^{2\alpha-1\,|\,2r}\,b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha)'\,\beta'} =$$

$$2\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(b+a)\,(b+a+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}+(b-a)\,(b-a+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$8)\ \int \frac{a\,(a+r-2\alpha r)^{2\alpha\,|\,2r}\,b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha+1)'\,\beta'} =$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

$$\frac{(b+a)\,(b+a+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}-(b-a)\,(b-a+2r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{2\,n'}$$

4.) *Zusatz.* Setzt man aber in der Formel 1) des Lehrsatzes $-a$ statt a, so erhält man, da nach §. 35. 3)

$$(-a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}=(-1)^{\alpha}\,(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}$$

die Formel

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\,b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{\alpha'\,\beta'} = \frac{(b-a+r-nr)^{n\,|\,2r}}{n'}$$

$$\alpha+\beta=n$$

Verbindet man diese Formel durch Addition und Subtraction mit der Formel 1) des Lehrsatzes, woraus sie entstanden ist, so erhält man, nach §. 19. Zus.

$$1)\ \int \frac{(a+r-2\alpha r)^{2\alpha\,|\,2r}\,b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha)'\,\beta'} =$$

$$2\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(b+a+r-nr)^{n\,|\,2r}+(b-a+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$2)\ \int \frac{(a-2\alpha r)^{2\alpha+1\,|\,2r}\,b\,(b+2r-\beta r)^{\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha+1)'\,\beta'} =$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

$$\frac{(b+a+r-nr)^{n\,|\,2r}-(b-a+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

Verwechselt man hier a und b, und in den Integralen α und β, so erhält man

$$3)\quad \int \frac{a(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{\alpha'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\frac{(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}+(a-b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$4)\quad \int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\,(b-2\beta r)^{2\beta+1\,|\,2r}}{\alpha'\,(2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1$$

$$\frac{(a+b+r-nr)^{n\,|\,2r}-(a-b+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

5.) *Zusatz.* Unterscheidet man in den Formeln des 3.) und 4.) Zusatzes gerade und ungerade Werthe von n, so erhält man aus den nehmlichen Gründen wie in §. 38. 5.) Zus. die zwölf Formeln

$$1)\quad \int \frac{(a+r-2\alpha r)^{2\alpha\,|\,r}\,b\,(b+2r-2\beta r)^{2\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha)'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}+(a-b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n)'} =$$

$$\frac{(b+a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}+(b-a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n)'}$$

$$2)\quad \int \frac{(a-2\alpha r)^{2\alpha+1\,|\,2r}\,b\,(b+2r-2\beta r)^{2\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b-2nr)^{2n+1\,|\,2r}+(a-b-2nr)^{2n+1\,|\,2r}}{2\,(2n+1)'}$$

$$\frac{(b+a-2nr)^{2n+1\,|\,2r}-(b-a-2nr)^{2n+1\,|\,2r}}{2\,(2n+1)'} =$$

$$3)\ \int \frac{(a-2\alpha r)^{2\alpha+1\,|\,2r}\, b\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+\beta=n-1$$

$$\frac{(a+b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}-(a-b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n)'} =$$

$$\frac{(b+a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}-(b-a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n)'}$$

$$4)\ \int \frac{(a+r-2\alpha r)^{2\alpha\,|\,2r}\, b\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{(2\alpha)'\,(2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b-2nr)^{2n+1\,|\,2r}-(a-b-2nr)^{2n+1\,|\,2r}}{2\,(2n+1)'} =$$

$$\frac{(b+a-2nr)^{2n+1\,|\,2r}+(b-a-2nr)^{2n+1\,|\,2r}}{2\,(2n+1)'}$$

$$5)\ \int \frac{a\,(a+2r-2\alpha r)^{2\alpha-1\,|\,2r}\, b\,(b+2r-2\beta r)^{2\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha)'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}+(a-b)\,(a-b+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}}{2\,(2n)'} =$$

$$\frac{(b+a)\,(b+a+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}+(b-a)\,(b-a+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}}{2\,(2n)'}$$

$$6)\ \int \frac{a\,(a+r-2\alpha r)^{2\alpha\,|\,2r}\, b\,(b+2r-2\beta r)^{2\beta-1\,|\,2r}}{(2\alpha+1)'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}+(a-b)\,(a-b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n+1)'} =$$

$$\frac{(b+a)\,(b+a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}-(b-a)\,(b-a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n+1)'}$$

$$7)\ \int \frac{a\,(a+r-2\alpha r)^{2\alpha\,|\,2r}\,b\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{(2\alpha+1)^{\prime}\,(2\beta+1)^{\prime}} =$$

$$\alpha+\beta=n-1$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}-(a-b)\,(a-b+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}}{2\,(2n)^{\prime}} =$$

$$\frac{(b+a)\,(b+a+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}-(b-a)\,(b-a+2r-2nr)^{2n-1\,|\,2r}}{2\,(2n)^{\prime}}$$

$$8)\ \int \frac{a\,(a+2r-2\alpha r)^{2\alpha-1\,|\,2r}\,b\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{(2\alpha)^{\prime}\,(2\beta+1)^{\prime}} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}-(a-b)\,(a-b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n+1)^{\prime}} =$$

$$\frac{(b+a)\,(b+a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}+(b-a)\,(b-a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n+1)^{\prime}}$$

$$9)\ \int \frac{a\,(a+2r-2\alpha r)^{2\alpha-1\,|\,2r}\,(b+r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}}{(2\alpha)^{\prime}\,(2\beta)^{\prime}} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}+(a-b+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n)^{\prime}} =$$

$$\frac{(b+a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}+(b-a+r-2nr)^{2n\,|\,2r}}{2\,(2n)^{\prime}}$$

$$10)\ \int \frac{a\,(a+2r-2\alpha r)^{2\alpha-1\,|\,2r}\,(b-2\beta r)^{2\beta+1\,|\,2r}}{(2\alpha)^{\prime}\,(2\beta+1)^{\prime}} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b-2nr)^{2n+1\,|\,2r}-(a-b-2nr)^{2n+1\,|\,2r}}{2\,(2n+1)^{\prime}} =$$

$$\frac{(b+a-2nr)^{2n+1\,|\,2r}+(b-a-2nr)^{2n+1\,|\,2r}}{2\,(2n+1)^{\prime}}$$

$$11)\ \int \frac{a\,(a+r-2\alpha r)^{2\alpha|2r}\,(b-2\beta r)^{2\beta+1|2r}}{(2\alpha+1)^{l}\ (2\beta+1)^{l}} =$$

$$\alpha+\beta=n-1$$

$$\frac{(a+b+r-2nr)^{2n|2r}-(a-b+r-2nr)^{2n|2r}}{2\,(2n)^{l}} =$$

$$\frac{(b+a+r-2nr)^{2n|2r}-(b-a+r-2nr)^{2n|2r}}{2\,(2n)^{l}}$$

$$12)\ \int \frac{a\,(a+r-2\alpha r)^{2\alpha|2r}\,(b+r-2\beta r)^{2\beta|2r}}{(2\alpha+1)^{l}\ (2\beta)^{l}} =$$

$$\alpha+\beta=n$$

$$\frac{(a+b-2nr)^{2n+1|2r}+(a-b-2nr)^{2n+1|2r}}{2\,(2n+1)^{l}} =$$

$$\frac{(b+a-2nr)^{2n+1|2r}-(b-a-2nr)^{2n+1|2r}}{2\,(2n+1)^{l}}$$

Verwechselt man a und b, und in den Integralen α und β, so geht von den Formeln 5) und 7) jede in sich selbst, und von den Formeln 1) und 9) 2) und 10), 3) und 11), 4) und 12), 6) und 8) jede in die andere über.

6.) *Zusatz.* Setzt man in den Formeln 1) und 3) des 3.) Zus., und der Formel 4) des 4.) Zusatzes $b=2mr$, wo m Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man, da nach den Formeln 1), 2), 4) und 6) in §. 35.

$$2mr\,(2mr+2r-2\beta r)^{2\beta-1|2r}=(2r)^{2\beta}\,m\,(m+1-\beta)^{2\beta-1|1}=$$

$$(2r)^{2\beta}\,m\,(m+1-\beta)^{\beta-1|1}\,m^{\beta|1}=(2r)^{2\beta}\,(m+1-\beta)^{\beta|1}\,m^{\beta|1}=$$

$$(2r)^{2\beta}\,m^{\beta|1-1}\,m^{\beta|1}$$

$$(2mr-2\beta r)^{2\beta+1|2r}=(2r)^{2\beta+1}\,(m-\beta)^{2\beta+1|1}=$$

$$(2r)^{2\beta+1}\,(m-\beta)^{\beta+1|1}\,(m+1)^{\beta|1}=(2r)^{2\beta+1}\,m^{\beta+1|1-1}\,(m+1)^{\beta|1}$$

die Formeln

$$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha|2r}\,(2r)^{2\beta}\,m^{\beta|-1}\,m^{\beta|1}}{\alpha'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\frac{(a+2mr+r-nr)^{n|2r}+(a-2mr+r-nr)^{n|2r}}{2n'}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1|2r}\,(2r)^{2\beta}\,m^{\beta|-1}\,m^{\beta|1}}{\alpha'\,(2\beta)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\frac{(a+2mr)\,(a+2mr+2r-nr)^{n-1|2r}+(a-2mr)\,(a-2mr+2r-nr)^{n-1|2r}}{2n'}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1|2r}\,(2r)^{2\beta+1}\,m^{\beta+1|-1}\,(m+1)^{\beta|1}}{\alpha'\,(2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1$$

$$\frac{(a+2mr+r-nr)^{n|2r}-(a-2mr+r-nr)^{n|2r}}{2n'}$$

Da aber in den combinatorischen Integralen das allgemeine Glied verschwindet, wenn in den beiden ersten Gleichungen $\beta \geqq m+1$, in der dritten $\beta \leqq m$ ist, so kann man nach §. 28. 2.) Zus. den ersten die Bedingungsgleichung $\beta+\gamma=m$, dem dritten $\beta+\gamma=m-1$ beifügen, und erhält so, wenn man zugleich durch m' dividirt, nach §. 36. 1.) Zus.

1) $$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha|2r}\,(2r)^{2\beta}\,(\beta+\gamma)^{\beta|1}}{\alpha'\,(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+r-nr)^{n|2r}+(a-2mr+r-nr)^{n|2r}}{2n'\,m'}$$

2) $$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1|2r}\,(2r)^{2\beta}\,(\beta+\gamma)^{\beta|1}}{\alpha'\,(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr)\,(a+2mr+2r-nr)^{n-1|2r}+(a-2mr)\,(a-2mr+2r-nr)^{n-1|2r}}{2n'\,m'}$$

$$3)\ \int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\,(2r)^{2\beta+1}\,(\beta+\gamma+2)^{\beta\,|\,1}}{\alpha'\ (2\beta+1)'\ \gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\ \beta+\gamma=m-1$$

$$\frac{(a+2mr+r-nr)^{n\,|\,2r}-(a-2mr+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'\,m'}$$

Setzt man eben so in den Formeln 2) und 4) des 3.) Zusatzes, und der Formel 3) des 4.) Zusatzes, $b=(2m+1)r$, wo m Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man, da nach den Formeln 1), 2) und 6) in §. 35.

$$(2mr+2r-2\beta r)^{2\beta\,|\,2r}=(2r)^{2\beta}\,(m+1-\beta)^{2\beta\,|\,1}=$$

$$(2r)^{2\beta}\,(m+1-\beta)^{\beta\,|\,1}\,(m+1)^{\beta\,|\,1}=(2r)^{2\beta}\,m^{\beta\,|\,-1}\,(m+1)^{\beta\,|\,1}$$

die Formeln:

$$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\,(m+\frac{1}{2})\,(2r)^{2\beta+1}\,m^{\beta\,|\,-1}\,(m+1)^{\beta\,|\,1}}{\alpha'\ (2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1$$

$$\frac{(a+2mr+2r-nr)^{n\,|\,2r}-(a-2mr-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\,(m+\frac{1}{2})\,(2r)^{2\beta+1}\,m^{\beta\,|\,-1}\,(m+1)^{\beta\,|\,1}}{\alpha'\ (2\beta+1)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-r$$

$$\frac{(a+2mr+r)\,(a+2mr+3r-nr)^{n-1\,|\,2r}-(a-2mr-r)\,(a-2mr+r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{2\,n'}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\,(2r)^{2\beta}\,m^{\beta\,|\,-1}\,(m+1)^{\beta\,|\,1}}{\alpha'\ (2\beta)'} =$$

$$\alpha+2\beta=n$$

$$\frac{(a+2mr+2r-nr)^{n\,|\,2r}+(a-2mr-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'}$$

Da aber in den combinatorischen Integralen das allgemeine Glied verschwindet, wenn $\beta \gtrless m+1$ ist, so kann man nach §. 28. 2.) Zus. die

Bedingungsgleichung $\beta+\gamma=m$ beifügen, und erhält so, wenn man zugleich durch m' dividirt, nach §. 36. 1.) Zus.

$$4)\ \int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\,(2r)^{2\beta+1}\,(\beta+\gamma+1)^{\beta\,|\,1}}{\alpha'\,(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\ \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+2r-nr)^{n\,|\,2r}-(a-2mr-nr)^{n\,|\,2r}}{n'\,m'\,(2m+1)}$$

$$5)\ \int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\,(2r)^{2\beta+1}\,(\beta+\gamma+1)^{\beta\,|\,1}}{\alpha'\,(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\ \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+r)\,(a+2mr+3r-nr)^{n-1\,|\,2r}-(a-2mr-r)\,(a-2mr+r-nr)^{n-1\,|\,2r}}{n'\,m'\,(2m+1)}$$

$$6)\ \int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1\,|\,2r}\,(2r)^{2\beta}\,(\beta+\gamma+1)^{\beta\,|\,1}}{\alpha'\,(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+2r-nr)^{n\,|\,2r}+(a-2mr-nr)^{n\,|\,2r}}{2\,n'\,m'}$$

7.) *Zusatz.* Multiplicirt man von den sechs Formeln des vorigen Zusatzes, die beiden ersten mit $n'\,(m-1)'$, die vier letztern aber mit $n'\,m'$, wo also in den beiden erstern m nicht Null, sondern eine ganze positive Zahl bedeuten mufs, so erhält man nach §. 36. 1.) und 2.) Zus. und §. 35. 2)

$$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha\,|\,2r}\,(2nr)^{2\beta\,|\,-2r}\,(2\beta+\gamma-1)^{'}}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+r-nr)^{n\,|\,2r}+(a-2mr+r-nr)^{n\,|\,2r}}{2m}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1}\,l^{2r}\,(2nr)^{2\beta}\,l^{-2r}\,(2\beta+\gamma-1)'}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\ \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr)\,(a+2mr+2r-nr)^{n-1}\,l^{2r}+(a-2mr)\,(a-2mr+2r-nr)^{n-1}\,l^{2r}}{2m}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1}\,l^{2r}\,(2nr)^{2\beta+1}\,l^{-2r}\,(2\beta+\gamma+1)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\quad \beta+\gamma=m-1$$

$$\frac{(a+2mr+r-nr)^{n}\,l^{2r}-(a-2mr+r-nr)^{n}\,l^{2r}}{2}$$

$$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\alpha}\,l^{2r}\,(2nr)^{2\beta+1}\,l^{-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+2r-nr)^{n}\,l^{2r}-(a-2mr-nr)^{n}\,l^{2r}}{2m+1}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1}\,l^{2r}\,(2nr)^{2\beta+1}\,l^{-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+r)\,(a+2mr+3r-nr)^{n-1}\,l^{2r}-(a-2mr-r)\,(a-2mr+r-nr)^{n-1}\,l^{2r}}{2m+1}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1}\,l^{2r}\,(2nr)^{2\beta}\,l^{-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+2r-nr)^{n}\,l^{2r}+(a-2mr-nr)^{n}\,l^{2r}}{2}$$

Nun ist

$\alpha=n-2m+2\gamma$ in der ersten zweiten und sechsten

$\alpha=n-1-2m+2\gamma$ in der vierten und fünften

$\alpha=n+1-2m+2\gamma$ in der dritten

von diesen Gleichungen.

Dividirt man also von diesen Gleichungen

die erste und dritte durch $(a+r-nr+2mr)^{n-2m|2r}$

die zweite, vierte und sechste durch $(a+2r-nr+2mr)^{n-r-2m|2r}$

die fünfte durch $(a+3r-nr+2mr)^{n-2-2m|2r}$

so erhält man, da nach §. 35. 6)

in der ersten

$$(a+r-\alpha r)^{\alpha|2r} = (a+r-\alpha r)^{\gamma|2r}(a+r-nr+2mr)^{n-2m|2r}(a+r+nr-2mr)^{\gamma|2r}$$

in der zweiten und sechsten

$$(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1|2r} = (a+2r-\alpha r)^{\gamma|2r}(a+2r-nr+2mr)^{n-1-2m|2r}(a+nr-2mr)^{\gamma|2r}$$

in der dritten

$$(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1|2r} = (a+2r-\alpha r)^{\gamma|2r}(a+r-nr+2mr)^{n-2m|2r}(a+r+nr-2mr)^{\gamma|2r}$$

in der vierten

$$(a+r-\alpha r)^{\alpha|2r} = (a+r-\alpha r)^{\gamma|2r}(a+2r-nr+2mr)^{n-1-2m|2r}(a+nr-2mr)^{\gamma|2r}$$

in der fünften

$$(a+2r-\alpha r)^{\alpha-1|2r} = (a+2r-\alpha r)^{\gamma|2r}(a+3r-nr+2mr)^{n-2-2m|2r}(a-r+nr-2mr)^{\gamma|2r}$$

und da ferner nach §. 35. 6) bei diesen Gleichungen

in der ersten und dritten

$$(a+r-nr+2mr)^{n|2r} = (a+r-nr+2mr)^{n-2m|2r}(a+r+nr-2mr)^{2m|2r}$$

$$(a+r-nr-2mr)^{n|2r} = (a+r-nr-2mr)^{2m|2r}(a+r-nr+2mr)^{n-2m|2r}$$

in der zweiten

$$(a+2r-nr+2mr)^{n-1|2r} = (a+2r-nr+2mr)^{n-1-2m|2r}(a+nr-2mr)^{2m|2r}$$

$$(a+2r-nr-2mr)^{n-1|2r} = (a+2r-nr-2mr)^{2m|2r}(a+2r-nr+2mr)^{n-1-2m|2r}$$

in der vierten und sechsten

$$(a+2r-nr+2mr)^{n|2r} = (a+2r-nr+2mr)^{n-1-2m|2r}(a+nr-2mr)^{2m+1|2r}$$

$$(a-nr-2mr)^{n|2r} = (a-nr-2mr)^{2m+1|2r}(a+2r-nr+2mr)^{n-1-2m|2r}$$

in der fünften

$(a+3r-nr+2mr)^{n-1|2r} = (a+3r-nr+2mr)^{n-2-2m|2r}\,(a-r+nr-2mr)^{2m+1|2r}$

$(a+r-nr-2mr)^{n-1|2r} = (a+3r-nr-2mr)^{2m+1|2r}\,(a+3r-nr+2mr)^{n-2-2m|2r}$

die sechs Gleichungen:

$$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\gamma|2r}\,(a+r+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma-1)'}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+r+nr-2mr)^{2m|2r}+(a+r-nr-2mr)^{2m|2r}}{2m}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\gamma|2r}\,(a+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma-1)'}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr)\,(a+nr-2mr)^{2m|2r}+(a-2mr)\,(a+2r-nr-2mr)^{2m|2r}}{2m}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\gamma|2r}\,(a+r+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta+1|-2r}\,(2\beta+\gamma+1)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\quad \beta+\gamma=m-1$$

$$\frac{(a+r+nr-2mr)^{2m|2r}-(a+r-nr-2mr)^{2m|2r}}{2}$$

$$\int \frac{(a+r-\alpha r)^{\gamma|2r}\,(a+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta+1|-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+nr-2mr)^{2m+1|2r}-(a-nr-2mr)^{2m+1|2r}}{2m+1}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\gamma|2r}\,(a-r+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta+1|-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\alpha+2\beta=n-1,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+r)\,(a-r+nr-2mr)^{2m+1|2r}-(a-2mr-r)\,(a+r-nr-2mr)^{2m+1|2r}}{2m+1}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-\alpha r)^{\gamma\,|\,2r}\,(a+nr-2mr)^{\gamma\,|\,2r}\,(2nr)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma)^{\prime}}{(2\beta)^{\prime}\,\gamma^{\prime}} =$$

$$\alpha+2\beta=n,\quad \beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+nr-2mr)^{2m+1|2r}+(a-nr-2mr)^{2m+1|2r}}{2}$$

Allein aus Umkehrung von §. 28. 2.) Zus. erhellet leicht, dafs die veränderliche Gröfse α, und Bedingungsgleichung, welche den Werth von $\alpha+2\beta$ angiebt, weggeschaft werden kann, wenn man überall statt α seinen Werth aus letzterer substituirt. So erhält man die sechs Gleichungen:

$$\int \frac{(a+r-nr+2\beta r)^{\gamma\,|\,2r}\,(a+r+nr-2mr)^{\gamma\,|\,2r}\,(2nr)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma-1)^{\prime}}{(2\beta)^{\prime}\,\gamma^{\prime}} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+r+nr-2mr)^{2m|2r}+(a+r-nr-2mr)^{2m|2r}}{2m}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-nr+2\beta r)^{\gamma\,|\,2r}\,(a+nr-2mr)^{\gamma\,|\,2r}\,(2nr)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma-1)^{\prime}}{(2\beta)^{\prime}\,\gamma^{\prime}} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr)\,(a+nr-2mr)^{2m|2r}+(a-2mr)\,(a+2r-nr-2mr)^{2m|2r}}{2m}$$

$$\int \frac{a\,(a+3r-nr+2\beta r)^{\gamma\,|\,2r}\,(a+r+nr-2mr)^{\gamma\,|\,2r}\,(2nr)^{2\beta+1|-2r}\,(2\beta+\gamma+1)^{\prime}}{(2\beta+1)^{\prime}\,\gamma^{\prime}} =$$

$$\beta+\gamma=m-1$$

$$\frac{(a+r+nr-2mr)^{2m|2r}-(a+r-nr-2mr)^{2m|2r}}{2}$$

$$\int \frac{(a+2r-nr+2\beta r)^{\gamma|2r}\,(a+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta+1|-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+nr-2mr)^{2m+1|2r}-(a-nr-2mr)^{2m+1|2r}}{2m+1}$$

$$\int \frac{a\,(a+3r-nr+2\beta r)^{\gamma|2r}\,(a-r+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta+1|-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\,\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+r)(a-r+nr-2mr)^{2m+1|2r}-(a-2mr-r)(a+r-nr-2mr)^{2m+1|2r}}{2m+1}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-nr+2\beta r)^{\gamma|2r}\,(a+nr-2mr)^{\gamma|2r}\,(2nr)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma)'}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+nr-2mr)^{2m+1|2r}+(a-nr-2mr)^{2m+1|2r}}{2}$$

Setzt man endlich hier c statt nr, so erhält man mit Zuziehung von §. 35. 1) und 3) die sechs Formeln:

1) $$\int \frac{(a+r-c+2\beta r)^{\gamma|2r}\,(a-r+c-2\beta r)^{\gamma|-2r}\,(2c)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma-1)'}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+r+c-2mr)^{2m|2r}+(-a+r+c-2mr)^{2m|2r}}{2m}$$

2) $$\int \frac{a\,(a+2r-c+2\beta r)^{\gamma|2r}\,(a-2r+c-2\beta r)^{\gamma|-2r}\,(2c)^{2\beta|-2r}\,(2\beta+\gamma-1)'}{(2\beta)'\,\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr)\,(a+c-2mr)^{2m|2r}+(a-2mr)\,(-a+c-2mr)^{2m|2r}}{2m}$$

$$3)\int \frac{a(a+3r-c+2\beta r)^{\gamma|2r}(a-3r+c-2\beta r)^{\gamma|-2r}(2c)^{2\beta+1|-2r}(2\beta+\gamma+1)'}{(2\beta+1)'\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m-1$$

$$\frac{(a+r+c-2mr)^{2m|2r}-(-a+r+c-2mr)^{2m|2r}}{2}$$

$$4)\int \frac{(a+2r-c+2\beta r)^{\gamma|2r}(a-2r+c-2\beta r)^{\gamma|-2r}(2c)^{2\beta+1|-2r}(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+c-2mr)^{2m+1|2r}+(-a+c-2mr)^{2m+1|2r}}{2m+1}$$

$$5)\int \frac{a(a+3r-c+2\beta r)^{\gamma|2r}(a-3r+c-2\beta r)^{\gamma|-2r}(2c)^{2\beta+1|-2r}(2\beta+\gamma)'}{(2\beta+1)'\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+2mr+r)(a-r+c-2mr)^{2m+1|2r}+(a-2mr-r)(-a-r+c-2mr)^{2m+1|2r}}{2m+1}$$

$$6)\int \frac{a(a+2r-c+2\beta r)^{\gamma|2r}(a-2r+c-2\beta r)^{\gamma|-2r}(2c)^{2\beta|-2r}(2\beta+\gamma)'}{(2\beta)'\gamma'} =$$

$$\beta+\gamma=m$$

$$\frac{(a+c-2mr)^{2m+1|2r}-(-a+c-2mr)^{2m+1|2r}}{2}$$

Diese sechs Formeln gelten, ohnerachtet sie blos unter der Voraussetzung dafs c : r Null oder eine ganze positive Zahl ist, erwiesen worden, doch auch offenbar für *jeden* Werth von c.

8.) *Zusatz.* Allein auch von diesen sechs Formeln, läfst sich die erste und vierte, die zweite und fünfte, die dritte und sechste nach §. 19. Zus. vereinigen, und so erhält man auch

$$\int \frac{(a+r-c+\beta r)^{\gamma|2r}\,(a-r+c-\beta r)^{\gamma|-2r}\,(2c)^{\beta|-2r}\,(\beta+\gamma-1)^{\prime}}{\beta'\ \gamma'} = \sum_{\beta+2\gamma=n} \frac{(c+a+r-nr)^{n|2r} + (c-a+r-nr)^{n|2r}}{n}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-c+\beta r)^{\gamma|2r}\,(a-2r+c-\beta r)^{\gamma|-2r}\,(2c)^{\beta|-2r}\,(\beta+\gamma-1)^{\prime}}{\beta'\ \gamma'} = \sum_{\beta+2\gamma=n} \frac{(a+nr)\,(c+a-nr)^{n|2r} + (a-nr)\,(c-a-nr)^{n|2r}}{n}$$

$$\int \frac{a\,(a+2r-c+\beta r)^{\gamma|2r}\,(a-2r+c-\beta r)^{\gamma|-2r}\,(2c)^{\beta|-2r}\,(\beta+\gamma)^{\prime}}{\beta'\ \gamma'} = \sum_{\beta+2\gamma=n-1} \frac{(c+a+r-nr)^{n|2r} - (c-a+r-nr)^{n|2r}}{2}$$

oder, welches einerlei ist, nach §. 35. 1) und 3)

1) $$\int \frac{(-1)^{\gamma}\,(c-a+r-\beta r-2\gamma r)^{\gamma|2r}\,(c+a+r-\beta r-2\gamma r)^{\gamma|2r}\,(2c)^{\beta|-2r}\,(\beta+\gamma-1)^{\prime}}{\beta'\ \gamma'} = \sum_{\beta+2\gamma=n} \frac{(c+a+r-nr)^{n|2r} + (c-a+r-nr)^{n|2r}}{n}$$

2) $$\int \frac{(-1)^{\gamma}\,a\,(c-a-\beta r-2\gamma r)^{\gamma|2r}\,(c+a-\beta r-2\gamma r)^{\gamma|2r}\,(2c)^{\beta|-2r}\,(\beta+\gamma-1)^{\prime}}{\beta'\ \gamma'} = \sum_{\beta+2\gamma=n} \frac{(nr+a)\,(c+a-nr)^{n|2r} - (nr-a)\,(c-a-nr)^{n|2r}}{n}$$

3) $$\int \frac{(-1)^{\gamma}\, a\, (c-a-\beta r-2\gamma r)^{\gamma|2r}\, (c+a-\beta r-2\gamma r)^{\gamma|2r}\, (2c)^{\beta|-2r}\, (\beta+\gamma)^{\prime}}{\beta'\ \gamma'}$$

$$\beta+2\gamma=n-1$$

$$\frac{(c+a+r-nr)^{n|2r}-(c-a+r-nr)^{n|2r}}{2}$$

9.) *Zusatz.* Man kann aber auch diese Formeln ganz unabhängig von der Voraussetzung, dafs c : r Null oder eine ganze positive Zahl seyn soll, auf folgende Art erweisen. Da

$$c+a-\beta r+\gamma r=(2c-2\beta r)-(c-a-\beta r-\gamma r)$$

so ist auch nach §. 35. 4)

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}\, (\alpha+\beta)^{\prime}\, (c-a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha|2r}\, (c+a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma+1|2r}\, (2c)^{\beta|-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=n-1$$

$$=\int \frac{(-1)^{\alpha}\, (\alpha+\beta)^{\prime}\, (c-a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha|2r}\, (c+a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma|2r}\, (2c)^{\beta+1|-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=n-1$$

$$-\int \frac{(-1)^{\alpha}\, (\alpha+\beta)^{\prime}\, (c-a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+1|2r}\, (c+a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma|2r}\, (2c)^{\beta|-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=n-1$$

Das dritte dieser Integrale ist, wenn man darinnen nach §. 26. statt γ erst $\gamma+1$, dann 0 setzt, auch gleich

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}\, (\alpha+\beta)^{\prime}\, (c-a-r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+1|2r}\, (c+a-r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma+1|2r}\, (2c)^{\beta|-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=n-2$$

$$+\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha+1\,|\,2r}(c+a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(2c)^{\beta\,|\,-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

Das zweite dieser Integralien ist aber nach §. 13. und §. 26. 1.) Zus. gleich

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}\beta(\alpha+\beta-1)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma\,|\,2r}(2c)^{\beta\,|\,-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta+1,\quad 2\alpha+\beta+\gamma=n$$

und das vierte aus gleichem Grunde mit vorgesetztem — Zeichen, gleich

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}\alpha(\alpha+\beta-1)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma\,|\,2r}(2c)^{\beta\,|\,-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta+1,\quad 2\alpha+\beta+\gamma=n$$

Die Summe dieser beiden Integralien ist

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma\,|\,2r}(2c)^{\beta\,|\,-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$\alpha+\beta=\delta+1,\quad 2\alpha+\beta+\gamma=n$$

oder, welches nach §. 13. und §. 26. einerlei ist

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma\,|\,2r}(2c)^{\beta\,|\,-2r}}{\alpha'\ \beta'}$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=n$$

$$-(c+a+r-nr)^{n\,|\,2r}$$

Es ist demnach

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma+1\,|\,2r}(2c)^{\beta\,|\,-2r}}{\alpha'\ \beta'} =$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=n-1$$

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r-\gamma r)^{\alpha+\gamma\,|\,2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\,\beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=n$$

$$-\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha+1\,|\,2r}(c+a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\,\beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

$$+(c+a+r-nr)^{n\,|\,2r}$$

In dieser Gleichung entsteht das erste Integral aus dem zweiten, wenn man darinnen $\gamma+1$ statt γ setzt, es folgt also daraus nach §. 26.

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\,\beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n$$

$$-\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha+1\,|\,2r}(c+a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\,\beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

$$+(c-a+r-nr)^{n\,|\,2r}$$

Setzt man aber in dieser Gleichung $-a$ statt a, so erhält man

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\,\beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n$$

$$-\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha\,|\,2r}(c+a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha+1\,|\,2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\,\beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

Subtrahirt man nun diese beiden Gleichungen von einander, so erhält man mit Zuziehung von §. 35. 4), wenn man nachher halbirt

$$\frac{(c+a+r-nr)^{nl2r} - (c-a+r-nr)^{nl2r}}{2} = \int \frac{(-1)^{\alpha} a\,(\alpha+\beta)'\,(c-a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(c+a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(2c)^{\beta l-2r}}{\alpha'\,\beta'}$$

$$2\alpha+\beta = n-1$$

welches die Formel 3) des vorigen Zusatzes war.

Addirt man hingegen diese beiden Formeln, so erhält man

$$\frac{(c+a+r-nr)^{nl2r} + (c-a+r-nr)^{nl2r}}{2} = \int \frac{(-1)^{\alpha} 2\,(\alpha+\beta)'\,(c-a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(c+a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(2c)^{\beta l-2r}}{\alpha'\,\beta'}$$

$$2\alpha+\beta = n$$

$$-\int \frac{(-1)^{\alpha}\,(\alpha+\beta)'\,(c-a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(c+a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(2c)^{\beta+1\,l-2r}}{\alpha'\,\beta'}$$

$$2\alpha+\beta = n-1$$

Letzteres Integral kann nun, wenn n nicht Null, sondern eine ganze positive Zahl ist, auch so dargestellt werden

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}\,\beta\,(\alpha+\beta-1)'\,(c-a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(c+a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha l 2r}\,(2c)^{\beta l-2r}}{\alpha'\,\beta'}$$

$$2\alpha+\beta = n$$

Man hat also auch, wenn man zugleich durch n dividirt

$$\frac{(c+a+r-nr)^{n|2r} + (c-a+r-nr)^{n|2r}}{n} =$$

$$\int \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta-1)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\ \beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n$$

welches die Formel 1) des vorigen Zusatzes war.

Endlich ist nach §. 3. §. 26. 1.) Zus. und §. 36. 3.) Zus.

$$\int \frac{(-1)^{\alpha} a(\alpha+\beta-1)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(2c+2r)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\ \beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n$$

$$-\int \frac{(-1)^{\alpha} a(\alpha+\beta-1)^{\prime}(c-a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(c+a+r-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\ \beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n$$

$$=\int \frac{2r(-1)^{\alpha} a(\alpha+\beta)^{\prime}(c-a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(c+a-2\alpha r-\beta r)^{\alpha|2r}(2c)^{\beta|-2r}}{\alpha^{\prime}\ \beta^{\prime}}$$

$$2\alpha+\beta=n-1$$

Das mittlere dieser Integrale ist nach der schon erwiesenen Formel 1)

$$\frac{a(c+a+r-nr)^{n|2r} + a(c+a+r-nr)^{n|2r}}{n}$$

das letztere aber nach der ebenfalls schon erwiesenen Formel 3)

$$r(c+a+r-nr)^{n|2r} - r(c-a+r-nr)^{n|2r}$$

also das erstere

$$\frac{(nr+a)(c+a+r-nr)^{n|2r} - (nr-a)(c-a+r-nr)^{n|2r}}{n}$$

welches die Formel 2) des vorigen Zusatzes war, nur dafs $c+r$ statt c gesetzt ist.

10.) *Zusatz.* Setzt man in den Formeln des 5.) Zusatzes $r=\frac{1}{2}$, und überdies in 1) $a=l+\frac{1}{2}$, $b=m$, in 2) $a=l$, $b=m$, in 3) $a=l$, $b=m+\frac{1}{2}$, und in 4) $a=l+\frac{1}{2}$, $b=m+\frac{1}{2}$, wo auch l und m Null oder ganze positive Zahlen bedeuten, so erhält man

$$\int \frac{(2\alpha+\delta)^{l}\,(2\beta+\gamma-1)^{l}}{(2\alpha)^{l}\,(2\beta)^{l}\,\gamma^{l}\,\delta^{l}} = \frac{(l+m-n+1)^{2n|1} + (l-m-n+1)^{2n|1}}{2m\,(2n)^{l}}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta+1)^{l}\,(2\beta+\gamma-1)^{l}}{(2\alpha+1)^{l}\,(2\beta)^{l}\,\gamma^{l}\,\delta^{l}} = \frac{(l+m-n)^{2n+1|1} + (l-m-n)^{2n+1|1}}{2m\,(2n+1)^{l}}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l-1$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta+1)^{l}\,(2\beta+\gamma)^{l}}{(2\alpha+1)^{l}\,(2\beta+1)^{l}\,\gamma^{l}\,\delta^{l}} = \frac{(l+m-n+1)^{2n|1} - (l-m-n)^{2n|1}}{(2m+1)\,(2n)^{l}}$$

$\alpha+\beta=n-1,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l-1$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta)^{l}\,(2\beta+\gamma)^{l}}{(2\alpha)^{l}\,(2\beta+1)^{l}\,\gamma^{l}\,\delta^{l}} = \frac{(l+m-n+1)^{2n+1|1} - (l-m-n)^{2n+1|1}}{(2m+1)\,(2n+1)^{l}}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

Diese vier Formeln kann man nach §. 19. Zus. aber in folgende einzige vereinigen

$$1)\quad \int \frac{(\alpha+\delta)^{l}\,(\beta+\gamma-1)^{l}}{\alpha^{l}\,\beta^{l}\,\gamma^{l}\,\delta^{l}} = \int \frac{(k+1-n)^{n|1} + (-1)^{m}\,(k+1-n-m)^{n|1}}{m\,n^{l}}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+2\gamma=m,\ \alpha+2\delta=l-1$ $\qquad$ $l+m+n-1=2k$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=k$

wo aber m nicht Null seyn darf.

Setzt man eben so in 5) $a=l$, $b=m$, in 6) $a=l+\frac{1}{2}$, $b=m$, in 7) $a=l+\frac{1}{2}$, $b=m+\frac{1}{2}$, in 8) $a=l$, $b=m+\frac{1}{2}$, so erhält man

$$\int \frac{(2\alpha+\delta-1)^l\,(2\beta+\gamma-1)^l}{(2\alpha)^l\,(2\beta)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m)\,(l+m-n+1)^{2n-1}l_1 + (l-m)\,(l-m-n+1)^{2n-1}l_1}{2\,m\,l\,(2n)^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta)^l\,(2\beta+\gamma-1)^l}{(2\alpha+1)^l\,(2\beta)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m+\frac{1}{2})\,(l+m-n+1)^{2n}l_1 + (l-m+\frac{1}{2})\,(l-m-n+1)^{2n}l_2}{m\,(2l+1)\,(2n+1)^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta)^l\,(2\beta+\gamma)^l}{(2\alpha+1)^l\,(2\beta+1)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m+1)\,(l+m-n+2)^{2n-1}l_1 - (l-m)\,(l-m-n+1)^{2n-1}l_2}{\frac{1}{2}\,(2l+1)\,(2m+1)\,(2n)^l}$$

$\alpha+\beta=n-1,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta-1)^l\,(2\beta+\gamma)^l}{(2\alpha)^l\,(2\beta+1)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m+\frac{1}{2})\,(l+m-n+1)^{2n}l_1 - (l-m-\frac{1}{2})\,(l-m-n)^{2n}l_2}{l\,(2m+1)\,(2n+1)^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

Diese vier Formeln kann man wieder in folgende einzige vereinigen

$$2)\ \int \frac{(\alpha+\delta-1)^l\,(\beta+\gamma-1)^l}{\alpha^l\,\beta^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \int \frac{(l+m)\,(k+1-n)^{n-1}l_1 + (-1)^m(l-m)\,(k+1-n-m)^{n-1}l_2}{l\,m\,n^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+2\gamma=m,\ \alpha+2\delta=l$ $\qquad$ $l+m+n=2k$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=k$

wo aber weder m noch l Null seyn darf.

Setzt man eben so in 9) $a=l$, $b=m+\frac{1}{2}$, in 10) $a=l$, $b=m$, in 11) $a=l+\frac{1}{2}$, $b=m$, in 12) $a=l+\frac{1}{2}$, $b=m+\frac{1}{2}$, so erhält man

$$\int \frac{(2\alpha+\delta-1)^l\,(2\beta+\gamma)^l}{(2\alpha)^l\,(2\beta)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m-n+1)^{2n}l_1 + (l-m-n)^{2n}l_2}{2\,l\,(2n)^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta-1)^l\,(2\beta+\gamma+1)^l}{(2\alpha)^l\,(2\beta+1)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m-n)^{2n+1\,l} - (l-m-n)^{2n+1\,l}}{2l\,(2n+1)^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m-1,\ \alpha+\delta=l$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta)^l\,(2\beta+\gamma+1)^l}{(2\alpha+1)^l\,(2\beta+1)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m-n+1)^{2n\,l} - (l-m-n+1)^{2n\,l}}{(2l+1)\,(2n)^l}$$

$\alpha+\beta=n-1,\ \beta+\gamma=m-1,\ \alpha+\delta=l$

$$\int \frac{(2\alpha+\delta)^l\,(2\beta+\gamma)^l}{(2\alpha+1)^l\,(2\beta)^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \frac{(l+m-n+1)^{2n+1\,l} + (l-m-n)^{2n+1\,l}}{(2l+1)\,(2n+1)^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+\gamma=m,\ \alpha+\delta=l$

und auch diese vier Formeln kann man in folgende einzige vereinigen

3) $$\int \frac{(\alpha+\delta-1)^l\,(\beta+\gamma)^l}{\alpha^l\,\beta^l\,\gamma^l\,\delta^l} = \int \frac{(k+1-n)^{n\,l} - (-1)^m\,(k+1-n-m)^{n\,l}}{1\,n^l}$$

$\alpha+\beta=n,\ \beta+2\gamma=m-1,\ \alpha+2\delta=l$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=k$

$1+m+n-1=2k$

wo aber l nicht Null seyn darf.

11.) *Zusatz.* Aus den Bedingungsgleichungen der links in den drei Gleichungen des vorigen Zusatzes stehenden Integrale folgt $\gamma+\delta=k-n$. Daraus folgt, dafs diese Bedingungsgleichungen unauflösbar sind, sobald $k \prec n$ ist, mithin für diesen Fall die Integrale links verschwinden. Dafs aber auch dann die Integrale rechts Null werden, erhellet also. Es ist dann auch $k+1 \preceq n$, mithin $k+1-n$, also noch vielmehr $k+1-n-m$ Null oder negativ. Da nun in 1) und 3) $l+m+n-1=2k$, und auch $n \succ k$, so ist auch $l+m-1 \prec k$, also $l \prec k+1-m$, mithin $k+1-m$, und noch vielmehr $k+1$ positiv. Da ferner in 2) $l+m+n=2k$, und auch $n \succ k$, so ist auch $l+m \prec k$, also $l \prec k-m$, folglich $k-m$, also noch vielmehr k positiv. — Die Factorielle $f^{n\,l}$ verschwindet nehmlich, wenn f Null oder eine ganze *negative* Zahl, hingegen $f+n$ eine ganze *positive* Zahl ist, woraus von selbst folgt, dafs auch n eine ganze positive Zahl seyn müsse.

Sollen also in den drei Gleichungen des vorigen Zusatzes die combinatorischen Integrale nicht verschwinden, so kann man $k+n$ statt k setzen, und erhält so die drei Gleichungen:

1) $$\int \frac{(\alpha+\delta)^{\prime}\,(\beta+\gamma-1)^{\prime}}{\alpha^{\prime}\;\beta^{\prime}\;\gamma^{\prime}\;\delta^{\prime}} = \int \frac{(k+1)^{n\,l\,1} + (-1)^{m}\,(k+1-m)^{n\,l\,1}}{m\;n^{\prime}}$$

$\alpha+\beta=n,\ \gamma+\delta=k,\ \beta+2\gamma=m,\ \alpha+2\delta=l-1$ $\qquad$ $l+m-1=2k+n$

2) $$\int \frac{(\alpha+\delta-1)^{\prime}\,(\beta+\gamma-1)^{\prime}}{\alpha^{\prime}\;\beta^{\prime}\;\gamma^{\prime}\;\delta^{\prime}} = \int \frac{(l+m)\,(k+1)^{n-1\,l\,1} + (-1)^{m}\,(l-m)\,(k+1-m)^{n-1\,l\,1}}{l\;m\;n^{\prime}}$$

$\alpha+\beta=n,\ \gamma+\delta=k,\ \beta+2\gamma=m,\ \alpha+2\delta=l$ $\qquad$ $l+m=2k+n$

3) $$\int \frac{(\alpha+\delta-1)^{\prime}\,(\beta+\gamma)^{\prime}}{\alpha^{\prime}\;\beta^{\prime}\;\gamma^{\prime}\;\delta^{\prime}} = \int \frac{(k+1)^{n\,l\,1} - (-1)^{m}\,(k+1-m)^{n\,l\,1}}{l\;n^{\prime}}$$

$\alpha+\beta=n,\ \gamma+\delta=k,\ \beta+2\gamma=m-1,\ \alpha+2\delta=l$ $\qquad$ $l+m-1=2k+n$

12.) *Zusatz.* Nimmt man in den Formeln des vorigen Zusatzes für k eine willkührliche ganze nicht negative Zahl, für l und m aber ganze positive Zahlen gröfser als k an, so bekommt in beiden Fällen auch n einen ganzen positiven Werth, die Factoriellen am weitesten zur Rechten verschwinden, und man erhält die drei Formeln:

1) $$\int \frac{(l-1-\delta)^{\delta\,l-1}\,(m-1-\gamma)^{\gamma-1\,l-1}}{\gamma^{\prime}\;\delta^{\prime\prime}} = \frac{(l+m-1-k)^{k\,l-1}}{m\;k^{\prime}}$$

$\gamma+\delta=k$

2) $$\int \frac{(l-1-\delta)^{\delta-1\,l-1}\,(m-1-\gamma)^{\gamma-1\,l-1}}{\gamma^{\prime}\;\delta^{\prime}} = \frac{(l+m)\,(l+m-1-k)^{k-1\,l-1}}{l\;m\;k^{\prime}}$$

$\gamma+\delta=k$

3) $$\int \frac{(l-1-\delta)^{\delta-1\,l-1}\,(m-1-\gamma)^{\gamma\,l-1}}{\gamma^{\prime}\;\delta^{\prime}} = \frac{(l+m-1-k)^{k\,l-1}}{l\;k^{\prime}}$$

$\gamma+\delta=n$

Da es nun für einen bestimmten Werth von k unendlich viele ganze positive Zahlen giebt, welche gröfser als k sind, so erhellet, dafs diese drei Formeln auch wahr sind, wenn l und m *alles* bedeutet.

Anmerkung. Die merkwürdigen Sätze in diesem §. bieten Stoff zu noch mehrern Betrachtungen dar, die ich aber hier nicht ausführen kann.

§. 57.

Der binomische Lehrsatz für ganze negative Exponenten.

Dieser Satz enthält bekanntlich die ersten Anwendungen unendlicher Reihen. Ich stelle ihn, so bekannt er auch ist, hier in der Absicht auf, um zu zeigen, wie leicht selbst mit unendlichen Reihen zu rechnen ist, wenn man sie als combinatorische Integrale behandelt, und obige Sätze darauf anwendet, und wie kurz dann die Schlüsse ausfallen.

Ich erinnere hierbei ein für allemal, dafs der Buchstabe x Null oder einen eigentlichen positiven oder negativen Bruch bedeutet.

Nach §. 3. und §. 26. ist

$$(1-x)\int x^{\alpha} = \int x^{\alpha} - \int x^{\alpha+1} = 1$$

also

$$1)\quad \int x^{\alpha} = (1-x)^{-1}$$

Allgemeiner aber ist, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, nach §. 36.

3.) Zus.

$$\int \frac{(\alpha+1)^{\beta}1}{\beta'} x^{\alpha}(1-x)^{\beta} - \int \frac{\alpha^{\beta}1}{\beta'} x^{\alpha}(1-x)^{\beta} = \int \frac{(\alpha+1)^{\beta}1}{\beta'} x^{\alpha}(1-x)^{\beta+1}$$

$$\beta+\gamma=n \qquad \beta+\gamma=n \qquad \beta+\gamma=n-1$$

Weiter ist nach §. 26.

$$\int^{\alpha\beta 1_1}_{\beta'} x^\alpha (1-x)^\beta = \int^{(\alpha+1)\beta 1_1}_{\beta'} x^{\alpha+1}(1-x)^\beta \quad \dot{+} 1$$

$$\beta+\gamma=n$$

$$\int^{(\alpha+1)\beta 1_1}_{\beta'} x^\alpha (1-x)^{\beta+1} + \int^{(\alpha+1)n 1_1}_{n'} x^\alpha (1-x)^{n+1} = \int^{(\alpha+1)\beta 1_1}_{\beta'} x^\alpha (1-x)^{\beta+1}$$

$$\beta+\gamma=n-1 \qquad\qquad \beta+\gamma=n$$

also, wenn man nach §. 3. addirt

$$\int^{(\alpha+1)n 1_1}_{n'} x^\alpha (1-x)^{n+1} = 1$$

folglich

$$2) \int^{(\alpha+1)n 1_1}_{n'} x^\alpha = (1-x)^{-n-1}$$

und letztere Formel enthält den binomischen Lehrsatz für den ganzen negativen Exponenten $-n-1$.

Man könnte sie auch so ausdrücken:

$$3) \int^{n\alpha 1_1}_{\alpha'} x^\alpha = (1-x)^{-n}$$

Denn dafs selbige richtig ist, wenn n positiv ist, folgt aus 2), und für $n=0$ ist kein Beweis nöthig.

1.) *Zusatz.* Die vorhin für $(1-x)^{-n-1}$ gefundene unendliche Reihe erhält man auch, wenn man 1 durch $(1-x)^{n+1}$ nach den gewöhnlichen Regeln der Buchstabenrechnung dividirt. — — Man kann aber auch nach dem Reste fragen, der entsteht, wenn man diese Division nicht ins unendliche fortsetzt, sondern nur bis auf $m-n$ Glieder.

Dieses wird sich durch Hülfe des Satzes bestimmen lassen, dafs immer

$$\int \frac{(-1)^{\beta} m^{\beta|r} (m+\beta r+r)^{\gamma|r} b^{\beta} c^{\gamma}}{\beta' \gamma'}{}_{r} = \int \frac{m^{\beta|r} r^{\gamma} (c-b)^{\beta} c^{\gamma}}{\beta'}{}_{\beta+\gamma=n} = \int \frac{(m+\gamma r+r)^{\beta|r} r^{\gamma} b^{\gamma} (c-b)^{\beta}}{\beta'}{}_{\beta+\gamma=n}$$

ist, was auch m bedeuten mag. Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich so überzeugen.

Nach §. 35. 6) ist

$$\int \frac{(-1)^{\gamma} m^{\beta+\gamma|r} r^{\alpha} c^{\alpha} c^{\beta} b^{\gamma}}{\beta' \gamma'}{}_{\alpha+\beta+\gamma=n} = \int \frac{(-1)^{\gamma} m^{\gamma|r} (m+\gamma r)^{\beta|r} r^{\alpha} c^{\alpha+\beta} b^{\gamma}}{\beta' \gamma'}{}_{\alpha+\beta+\gamma=n}$$

oder, welches nach §. 13. einerlei ist

$$\int \frac{(-1)^{\gamma} m^{\delta|r} r^{\alpha} c^{\alpha} c^{\beta} b^{\gamma}}{\beta' \gamma'}{}_{\beta+\gamma=\delta,\ \alpha+\delta=n} = \int \frac{(-1)^{\gamma} m^{\gamma|r} (m+\gamma r)^{\beta|r} r^{\alpha} c^{\varepsilon} b^{\gamma}}{\beta' \gamma'}{}_{\alpha+\beta=\varepsilon,\ \varepsilon+\gamma=n}$$

oder, wenn man *links* die veränderlichen Gröfsen β und γ nach §. 38. 1), *rechts* aber α und β nach §. 45. 12.) Zus. wegschaft,

$$\int \frac{m^{\delta|r} r^{\alpha} c^{\alpha} (c-b)^{\delta}}{\delta'}{}_{\alpha+\delta=n} = \int \frac{(-1)^{\gamma} m^{\gamma|r} (m+\gamma r+r)^{\varepsilon|r} c^{\varepsilon} b^{\gamma}}{\gamma' \varepsilon'}{}_{\varepsilon+\gamma=n}$$

wodurch die Gleichheit des ersten und zweiten Integrals dargethan ist.

Setzt man nun in dieser erwiesenen Gleichung $-m-n\,r$, c, b statt m, b, c, so findet sich nach einer leichten Reduction, dafs auch das erste und dritte der obigen Integrale einander gleich sind.

2.) *Zusatz.* Vermittelst dieses Hülfssatzes läfst sich nun der gesuchte Rest durch folgende Betrachtungen bestimmen.

Nach §. 38. 2) ist, wenn m Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet

$$1 = \int \frac{(\alpha+\beta)'}{\alpha'\,\beta'}\,(1-x)^{\alpha}\,x^{\beta}$$

$$\alpha+\beta=m$$

Bedeutet nun auch n Null oder eine ganze positive Zahl, so hat man hieraus nach §. 28.

$$1 = \int \frac{(n+1+\alpha+\beta)'}{(n+1+\alpha)'\,\beta'}\,(1-x)^{n+1+\alpha}x^{\beta} \;+\; \int \frac{(\alpha+\beta)'}{\alpha'\,\beta'}\,(1-x)^{\alpha}\,x^{\beta}$$

$$\alpha+\beta=m-n-1 \qquad\qquad \alpha+\beta=m,\ \alpha+\gamma=n$$

oder, welches nach §. 28. 2.) Zus. einerlei ist

$$1 = (1-x)^{n+1}\int \frac{m^{\beta|-1}}{\beta'}\,(1-x)^{\alpha}\,x^{\beta} \;+\; \int \frac{m^{\alpha|-1}}{\alpha'}\,(1-x)^{\alpha}\,x^{m-\alpha}$$

$$\alpha+\beta=m-n-1 \qquad\qquad \alpha+\gamma=n$$

Das erste dieser Integrale rechts, findet sich nach dem Hülfssatze in vorigem Zusatze, wenn man darinnen statt b, c, n, r setzt -1, $x-1$, $m-n-1$, -1, gleich

$$\int \frac{(n+1)^{\beta|-1}}{\beta'}\,x^{\beta} = \int \frac{(\beta+1)^{n|-1}}{n'}\,x^{\beta}$$

$$\beta+\gamma=m-n-1 \qquad\qquad \beta+\gamma=m-n-1$$

und das letzte, wenn man darinnen statt b, c, r setzt -1, $-x$, -1

$$= \int \frac{(-1)^{\gamma}\,m^{\beta|-1}\,(m-\beta-1)^{\gamma|-1}\,x^{m-\beta}}{\beta'\,\gamma'}$$

$$\beta+\gamma=n$$

Es ist demnach auch

$$1 = (1-x)^{n+1}\int \frac{(\alpha+1)^{n|-1}}{n'}\,x^{\alpha} + \int \frac{(-1)^{\gamma}\,m^{\beta|-1}\,(m-\beta-1)^{\gamma|-1}\,x^{m-\beta}}{\beta'\,\gamma'}$$

$$\alpha+\beta=m-n-1 \qquad\qquad \beta+\gamma=n$$

Dividirt man also 1 durch $(1-x)^{n+1}$ bis auf $m-n$ Theile, so ist

$$\text{der Quotient} = \int \frac{\overline{(\alpha+1)^{n|1}}}{n'} x^{\alpha}$$

$$\text{der Rest} = \int \frac{\overline{(-1)^{\gamma} m^{\beta|1-1} (m-\beta-1)^{\gamma|1-1}} \; x^{m-\beta}}{\beta' \; \gamma'} \quad \begin{matrix} \alpha+\beta = m-n-1 \\ \beta+\gamma = n \end{matrix}$$

3.) *Zusatz.* Differentiirt man diesen Rest, so erhält man nach §. 38. 1) und §. 35. 6) das einfache Resultat

$$\frac{m^{n+1|1-1} x^{m-n-1} (1-x)^n \, dx}{n'}$$

§. 58.

Der binomische Lehrsatz für alle Exponenten.

Man setze, daferne r Null oder einen *eigentlichen* positiven oder negativen Bruch bedeutet, die Summe der unendlichen Reihe

$$\int \frac{\overline{a^{\alpha|r}}}{\alpha'}$$

weil sie von a abhängt $= S(a)$, so hat man

$$\int \frac{\overline{a^{\alpha|r}}}{\alpha'} = S(a)$$

und eben so —

$$\int \frac{\overline{b^{\beta|r}}}{\beta'} = S(b)$$

also, wenn man multiplicirt nach §. 11.

$$\int \frac{\overline{a^{\alpha|r} b^{\beta|r}}}{\alpha' \quad \beta'} = S(a) \, . \, S(b)$$

Fügt man dem Integral zur Linken nach §. 13. die Bedingungsgleichung $\alpha+\beta=\gamma$ bei, und integrirt dann α und β nach §. 45. 2) hinweg, so findet es sich

$$= \int \frac{\overline{(a+b)^{\gamma}|r}}{\gamma^{l}} = S(a+b)$$

Da demnach $S(a).\ S(b) = S(a+b)$, so ist, wie leicht erhellet, für jeden Exponenten q $\quad [S(a)]^q = S(qa)$, oder

$$1)\quad \left[\int \frac{\overline{a^{\alpha}|r}}{\alpha^{l}}\right]^q = \int \frac{\overline{(qa)^{\alpha}|r}}{\alpha^{l}}$$

Setzt man hier $a = -r$, so erhält man als einen besondern Fall

$$2)\ (1-r)^q = \int \frac{\overline{(-qr)^{\alpha}|r}}{\alpha^{l}} = \int \frac{\overline{q^{\alpha}|-1}}{\alpha^{l}}\ (-r)^{\alpha}$$

und dies ist der binomische Lehrsatz für jeden Exponenten.

Setzt man aber hier $-q$ statt q, so erhält man

$$3)\ (1-r)^{-q} = \int \frac{\overline{(qr)^{\alpha}|r}}{\alpha^{l}} = \int \frac{\overline{q^{\alpha}|1}}{\alpha^{l}}\ r^{\alpha}$$

wovon die Formel 3) des vorigen §. nur ein besonderer Fall ist.

1.) *Zusatz.* Setzt man in der Formel 1) $a = 1$, $r = 0$, so erhält man

$$\left[\int \frac{\overline{1}}{\alpha^{l}}\right]^q = \int \frac{\overline{q^{\alpha}}}{\alpha^{l}}$$

Ist daher $e = \int \frac{1}{\alpha^{l}}$, so ist $e^q = \int \frac{q^{\alpha}}{\alpha^{l}}$.

2.) *Zusatz.* Ist aber r nicht 0, so hat man aus 3)

$$(1-r)^{-\frac{q}{r}} = \int \frac{\overline{q^{\alpha}|r}}{\alpha^{l}}$$

3.) *Zusatz.* Bezieht man Logarithmen auf die im 1.) Zusatze angeführte Zahl e als Grundzahl, so ist, wie dort bewiesen ist, daferne s eine positive Zahl ist

$$e^{s\log a} = \int \frac{s^\alpha (\log . a)^\alpha}{\alpha'}$$

also auch

$$1)\ a^s = \int \frac{s^\alpha (\log . a)^\alpha}{\alpha'}$$

4.) *Zusatz.* Hieraus folgt nach §. 26.

$$\frac{a^s - 1}{s} = \int \frac{s^\alpha (\log . a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)'}$$

Da nun für $s = o$ die Reihe rechts in log. a übergeht, so folgt, dafs auch $(a^s - 1) : s$ in log. a übergehe, wenn s unendlich klein ist.

5.) *Zusatz.* Aus der Formel 2) des §. folgt, wenn man s statt q setzt, nach §. 26.

$$(1-r)^s = \int \frac{s^{\alpha 1-1}}{\alpha'} (-r)^\alpha = 1 + \int \frac{s^{\alpha+1 1-1}}{(\alpha+1)'} (-r)^{\alpha+1}$$

Es ist also

$$\frac{(1-r)^s - 1}{s} = \int \frac{(s-1)^{\alpha 1-1}}{(\alpha+1)'} (-r)^{\alpha+1}$$

Für $s = o$ folgt hieraus nach 4.) Zus.

$$\mathrm{Log}.(1-r) = \int \frac{(-1)^{\alpha 1-1}}{(\alpha+1)'} (-r)^{\alpha+1} = -\int \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

6.) *Zusatz.* Setzt man hier $-r$ statt r, so erhält man

$$1)\ \mathrm{Log}.(1+r) = \int \frac{(-1)^\alpha r^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Diese Formel zu der des vorigen Zusatzes *addirt*, giebt nach §. 19. Zus.

$$\mathrm{Log}.(1-r^2) = -\int \frac{2 r^{2\alpha+2}}{2\alpha+2} = -\int \frac{r^{2\alpha+2}}{\alpha+1}$$

also nichts neues. *Subtrahirt* man hingegen diese Formeln, so erhält man

$$2)\ \text{Log.}\frac{1+r}{1-r} = \int \frac{2\,r^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$$

Anmerkung. So lassen sich die längst bekannten Reihen und Sätze für Logarithmen durch combinatorische Integrale ungemein leicht ableiten. Ein gleiches gilt von den Reihen, welche Bögen durch trigonometrische Linien, oder umgekehrt letztere durch erstere ausdrücken, welches ich vielleicht bei einer andern Gelegenheit auseinander setzen kann.

Verbesserungen.

Seite 21 Zeile 10 von oben

statt . . . *einem andern* I *gleich*

setze man . *einem andern* "I *gleich*

Seite 35 Zeile 9 des Beweises

statt . . . das heifst keine ganze

setze man . das heifst K eine ganze

Seite 59 fehlt nach dem vorletzten combinatorischen Integrale das Zeichen $=$

Seite 60 fehlt nach dem ersten combinatorischen Integrale das Zeichen $=$

Seite 64 fehlt in der vorletzten Formel mit combinatorischen Integralen zwischen den beiden ersten das Zeichen $=$

Seite 65 findet sich in der Formel 3) ein vorzüglich zu bemerkender den Sinn entstellender Druckfehler. In dem Zähler des allgemeinen Gliedes des combinatorischen Integrals gleich nach dem Zeichen $=$ mufs

statt . . . . . $\cos.(\alpha+1)z$

gesetzt werden . $2\cos.(\alpha+1)z$

Seite 79 in der dritten Formel von oben mufs die Bedingungsgleichung weiter zur Linken gerade unter das combinatorische Integral gerückt werden.

Seite 80 in der Zeile Text vor der Formel 2)

statt . . . $9°$

setze man . $90°$

Seite 86 vorletzte Zeile

statt . . . $\beta \overline{>} 1$

setze man . $\beta \overline{>} 1+1$

Seite 98 Zeile 2 des 5.) Zusatzes

statt . . . drei

setze man . *drei*

Ebend. mufs in der Formel 2) bei der Gröfse zur Rechten des Zeichens $=$ der Exponent im Zähler nicht $m+u$, sondern $m+n$ seyn.

Seite 109 in der vorletzten Doppelgleichung mufs

statt . . . . $\frac{(e+r-2mr)^{m\,1\,2r}}{m'}$

gesetzt werden . $\frac{(e+r-2mr)^{m|2r}}{m'}$

Seite 116 fehlt in der ersten, oben gleich nach der dritten Zeile befindlichen Formel vor dem combinatorischen Integrale zur Linken das Zeichen $\int$

Seite 125 in der Bedingungsgleichung des combinatorischen Integrals ganz oben zur Rechten

statt . . . $m+n=2+1$

setze man . $m+n=2l+r$

Ebendas. muſs die Bedingungsgleichung des combinatorischen Integrals ganz unten zur Linken heiſsen: $\alpha+2\beta=n$

Seite 134 im Zähler des allgemeinen Gliedes des combinator. Integrals in der Formel 6)

statt . . . $(a+r-2\alpha r)^{2\alpha-1}2r$

setze man . $(a+r-2\alpha r)^{2\alpha}1^{2r}$

Seite 136 im Zähler des allgemeinen Gliedes des combinator. Integrals in der Formel 1)

statt . . . $(a+r-2\alpha r)^{2\alpha}1r$

setze man . $(a+r-2\alpha r)^{2\alpha}1^{2r}$

Seite 145 Zeile 3 von oben gleich nach dem Zeichen $=$

statt . . . $(a+3r-nr-2mr)^{2m+1}1^{2r}$

setze man . $(a+r-nr-2mr)^{2m+1}1^{2r}$

Seite VIII der Vorrede Zeile 3 von oben

statt . . . §. 5. 6.

setze man . §. 56.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rothe, Heinrich August,

Theorie der combinatorischen Integrale

Nürnberg 1820
4 Math.p. 315 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053799-0